Εκθέτης
Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας
Φυλλο 25, 21 Δεκεμβριου 2023

ISSN 2241-3367
Εκδίδεται στην Αθήνα
Διανέμεται & αναπαράγεται ελεύθερα
e-mail: info@ekthetis.gr
Δικτυακός Τόπος:
http://www.ekthetis.gr/
Στοιχειοθετείται με το LaTeX2ε
Έκδοση-Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Διευθύνεται από Συντακτική Επιτροπή

Τετράγωνα επί των πλευρών τριγώνου: Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στις γεωμετρικές ανισότητες

Γιάννης Θωμαΐδης Θάνος Μάγκος

Περίληψη

Αντικείμενο της εργασίας είναι η εξέλιξη των γεωμετρικών προτάσεων για τα τετράγωνα που κατασκευάζονται επί των πλευρών τριγώνου, από τις Ευκλείδειες αποδείξεις στα *Στοιχεία* και τις εφαρμογές στην Τριγωνομετρία μέχρι τα νεώτερα αποτελέσματα στο ευρύ πεδίο των γεωμετρικών ανισοτήτων. Στην τελευταία περίπτωση δίνεται έμφαση στις αποδείξεις, βελτιώσεις και γενικεύσεις των στενά συνδεδεμένων ανισοτήτων Κριτικού-Βαρόπουλου και Weitzenböck.

Squares on the sides of a triangle:
From the Pythagorean Theorem to geometric inequalities

Abstract

The object of this paper is the evolution of geometric propositions about the squares constructed on the sides of a triangle, from Euclid's proofs in the *Elements* and applications in Trigonometry to more recent developments in the broad field of geometric inequalities. In the latter case emphasis is given in the proofs, refinements and generalizations of the strongly related inequalities of Kritikos-Varopoulos and Weitzenböck.

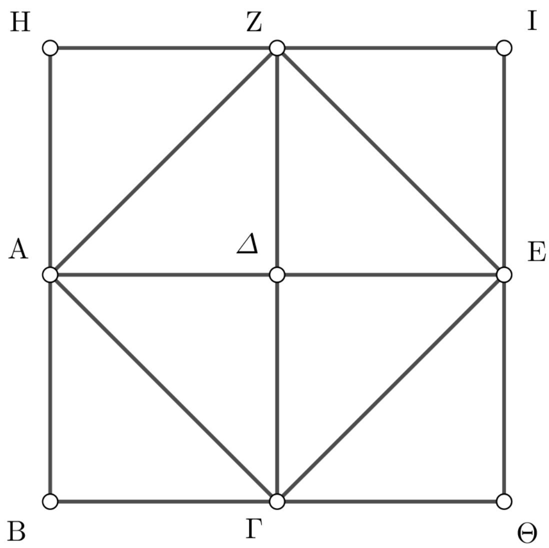
Περιεχόμενα

Σημειωση Η φράση «Τετράγωνα επί των πλευρών τριγώνου» προέρχεται από ομότιτλο κεφάλαιο του 2ου τόμου της Τριγωνομετρίας του Ιωάννη Πανάκη, ενός από τα πληρέστερα έργα της Ελληνικής βιβλιογραφίας των στοιχειωδών Μαθηματικών που εκδόθηκε πριν 50 ακριβώς χρόνια. Γενικότερα, στην εργασία μας επιχειρούμε να προβάλουμε ορισμένες σημαντικές συμβολές νεοελλήνων μαθηματικών που δεν είναι ευρύτερα γνωστές

1 Τετράγωνα επί των πλευρών τριγώνου: Το Πυθαγόρειο θεώρημα και οι επεκτάσεις του στην αρχαία Ευκλείδεια γεωμετρία.

Στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά η μελέτη των τετραγώνων που κατασκευάζονται στις πλευρές ενός γεωμετρικού σχήματος ήταν ένας φυσικός τρόπος υπέρβασης της αδυναμίας να εκφραστεί αριθμητικά η σχέση ανάμεσα σε δύο ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα. Π.χ. η «γραμμική ασυμμετρία» της διαγωνίου δ προς την πλευρά α ενός τετραγώνου (την οποία σήμερα, χρησιμοποιώντας την έννοια του άρρητου αριθμού, εκφράζουμε στη μορφή $\delta = \alpha\sqrt{2}$), γίνεται «τετραγωνική συμμετρία» αφού το τετράγωνο της διαγωνίου είναι διπλάσιο από το τετράγωνο της πλευράς (δηλαδή $\delta^2 = 2\alpha^2$).

Το παρακάτω σχήμα, από το «μάθημα γεωμετρίας» του Σωκράτη σε έναν αμόρφωτο δούλο που περιγράφει ο Πλάτων στο διάλογο «Μένων», δείχνει ότι αυτά τα ζητήματα ήταν ευρέως γνωστά στις αρχές του 4ου αιώνα π.Χ[1]

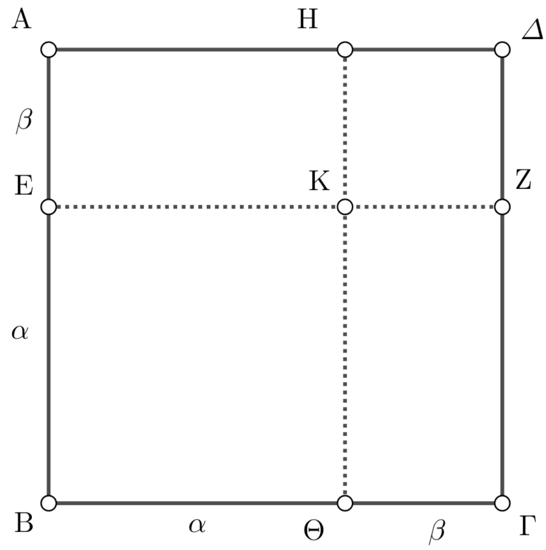


Το σχήμα δείχνει με «παραστατική προφάνεια» ότι αν με πλευρά τη διαγώνιο ΑΓ ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάσουμε ένα νέο τετράγωνο ΑΓΕΖ, τότε το νέο τετράγωνο έχει διπλάσιο εμβαδόν από το αρχικό. Από την παρατήρηση αυτή συνάγεται άμεσα ότι ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα στην ειδική περίπτωση του ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Ο Ευκλείδης, μετά την απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος και του αντιστρόφου του για τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο με τα οποία ολοκληρώνει το βιβλίο Ι των *Στοιχείων*, αποδεικνύει στο βιβλίο ΙΙ ορισμένες προτάσεις που συνιστούν τη λεγόμενη «γεωμετρική άλγεβρα».[2] Μια τέτοια πρόταση είναι π.χ. η ΙΙ 4, την οποία σήμερα θεωρούμε ως μία γεωμετρική ερμηνεία της αλγεβρικής ταυτότητας για το τετράγωνο ενός αθροίσματος:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta.$$

Ο Ευκλείδης, ο οποίος δεν χρησιμοποιεί αριθμητικά μήκη ή εμβαδά, την αποδεικνύει με αμιγώς γεωμετρικά επιχειρήματα για τα τετράγωνα και ορθογώνια του επόμενου σχήματος:



Η πρόταση αυτή (καθώς και η αντίστοιχη που αναφέρεται στο τετράγωνο της διαφοράς), χρησιμοποιείται στο ίδιο βιβλίο για την απόδειξη των θεωρημάτων της αμβλείας και της οξείας γωνίας, δηλ. των δύο φυσικών επεκτάσεων του Πυθαγόρειου θεωρήματος ([2], σσ.117-20, η έμφαση δική μας):

> *Στοιχεία*, Βιβλίο ΙΙ, Πρόταση 12
>
> *Στα αμβλυγώνια τρίγωνα, το τετράγωνο της πλευράς που υποτείνει την αμβλεία γωνία είναι* ***μεγαλύτερο*** *από τα τετράγωνα των πλευρών που περιέχουν την αμβλεία γωνία, κατά το διπλάσιο του ορθογωνίου που περιέχεται από μια πλευρά της αμβλείας γωνίας στην οποία πίπτει η κάθετος, και από το τμήμα που αποκόπτει η κάθετος πάνω στην προέκταση της πλευράς αυτής προς την αμβλεία γωνία.*
>
> *Στοιχεία*, Βιβλίο ΙΙ, Πρόταση 13
>
> *Στα οξυγώνια τρίγωνα, το τετράγωνο της πλευράς που υποτείνει την οξεία γωνία είναι*

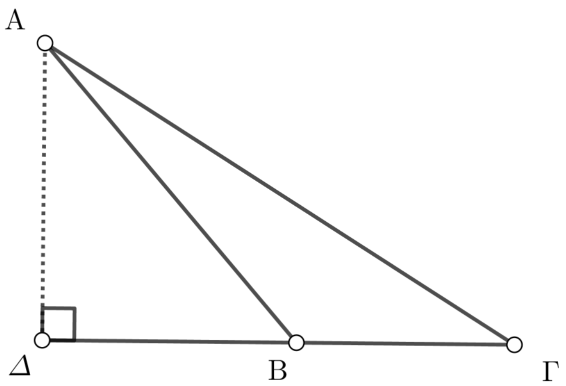
[1] Ο διάλογος «Μένων» έχει γραφεί το 386-385 π.Χ.

[2] Ο όρος αυτός επινοήθηκε από τους ιστορικούς των Μαθηματικών στα τέλη του 19ου αιώνα, αλλά τις τελευταίες δεκαετίες η χρήση του ως εργαλείου ερμηνείας του Ευκλείδειου έργου έχει αμφισβητηθεί. Για μία πρόσφατη ανάλυση του ζητήματος βλ. στο [1], σ.231 κ.ε. (Τα πλήρη στοιχεία όλων των βιβλιογραφικών παραπομπών υπάρχουν στο τέλος της εργασίας).

μικρότερο *από τα τετράγωνα των πλευρών που περιέχουν την οξεία γωνία, κατά το διπλάσιο του ορθογωνίου που περιέχεται από μια πλευρά της οξείας γωνίας στην οποία πίπτει η κάθετος, και από το τμήμα που αποκόπτει η κάθετος στο εσωτερικό της πλευράς αυτής προς την οξεία γωνία.*

Στην Ευκλείδεια απόδειξη του Πυθαγόρειου θεωρήματος τα τετράγωνα των πλευρών είναι πραγματικά τετράγωνα, σχεδιασμένα πάνω στις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου, η δε απόδειξη στηρίζεται σε μια διαδικασία κατάτμησής τους με χρήση βοηθητικών γραμμών και σύγκρισης των χωρίων που σχηματίζονται.

Στις αποδείξεις όμως των επεκτάσεων του Πυθαγόρειου, τα τετράγωνα των πλευρών είναι αφανή και όλη η διαδικασία έχει μια έντονη «αλγεβρική» χροιά. Για παράδειγμα, στην απόδειξη του θεωρήματος της αμβλείας γωνίας ο Ευκλείδης εφαρμόζει την πρόταση II4 στο τμήμα ΔΓ που δημιουργεί η «πίπτουσα κάθετος» (δηλαδή το ύψος ΒΔ) και το οποίο χωρίζεται από την κορυφή Α σε δύο άνισα μέρη ΓΑ και ΑΔ:



$$\mathrm{Γ}\Delta^2 = (\mathrm{ΓΑ} + \mathrm{Α}\Delta)^2 = \mathrm{ΓΑ}^2 + \mathrm{Α}\Delta^2 + 2\mathrm{ΓΑ}\cdot\mathrm{Α}\Delta$$

Στη συνέχεια προσθέτει στα δύο μέλη της προηγούμενης ισότητας το τετράγωνο του ΔΒ:

$$\mathrm{Γ}\Delta^2 + \Delta\mathrm{Β}^2 = \mathrm{ΓΑ}^2 + \mathrm{Α}\Delta^2 + \Delta\mathrm{Β}^2 + 2\mathrm{ΓΑ}\cdot\mathrm{Α}\Delta$$

Από την τελευταία, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στα τρίγωνα ΓΔΒ και ΑΔΒ, έπεται ότι

$$\mathrm{ΓΒ}^2 = \mathrm{ΓΑ}^2 + \mathrm{ΑΒ}^2 + 2\mathrm{ΓΑ}\cdot\mathrm{ΑΒ} \tag{1.1}$$

Η ισότητα (1.1) εκφράζει το λεγόμενο «θεώρημα αμβλείας γωνίας» της σύγχρονης Ευκλείδειας γεωμετρίας, αλλά το στοιχείο που πρέπει να επισημανθεί είναι ότι στα Στοιχεία η πρόταση II 12 (όπως και η II 13) έχει αμιγώς «ανισοτική» διατύπωση. Ο Ευκλείδης αναφέρει ότι το τετράγωνο της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από την αμβλεία (αντ. οξεία) γωνία είναι μεγαλύτερο (αντ. μικρότερο) από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών και προσδιορίζει ακριβώς τη υπεροχή (αντ. έλλειψη) ως ένα συγκεκριμένο ορθογώνιο χωρίο (δηλαδή το διπλάσιο του ορθογωνίου που κατασκευάζεται με πλευρές τα τμήματα ΓΑ και ΑΔ).

Αυτό το ορθογώνιο χωρίο φαίνεται ότι είχε κάποια ιδιαίτερη σημασία στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά, όπως προκύπτει από δύο προτάσεις ενός άλλου θεωρητικού έργου του Ευκλείδη, τα *Δεδομένα* ([3], σσ.167-68):

> *Δεδομένα*, Πρόταση 64
>
> *Αν ένα τρίγωνο έχει δεδομένη αμβλεία γωνία, τότε το χωρίο που εκφράζει την υπεροχή του τετραγώνου της πλευράς που υποτείνει την αμβλεία γωνία από τα τετράγωνα των πλευρών που περιέχουν την αμβλεία γωνία, θα έχει δεδομένο λόγο προς το τρίγωνο.*
>
> *Δεδομένα*, Πρόταση 65
>
> *Αν ένα τρίγωνο έχει δεδομένη οξεία γωνία, τότε το χωρίο που εκφράζει την έλλειψη του τετραγώνου της πλευράς που υποτείνει την οξεία γωνία από τα τετράγωνα των πλευρών που περιέχουν την οξεία γωνία, θα έχει δεδομένο λόγο προς το τρίγωνο.*

Για την απόδειξη της πρότασης 64, ο Ευκλείδης σημειώνει ότι αν είναι δεδομένη η αμβλεία γωνία $\mathrm{Β}\hat{\mathrm{Α}}\mathrm{Γ}$, τότε είναι δεδομένη και η παραπληρωματική της $\Delta\hat{\mathrm{Α}}\mathrm{Β}$, και άρα το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ είναι δεδομένο κατά το είδος (δηλαδή, παραμένει όμοιο προς εαυτό). Τότε όμως είναι δεδομένος και ο λόγος των καθέτων πλευρών ΑΔ και ΒΔ του ορθογωνίου τριγώνου (δηλαδή η συνεφαπτομένη της οξείας γωνίας Α). Αν λοιπόν ονομάσουμε λ αυτόν το λόγο και χρησιμοποιήσουμε σύγχρονη συμβολική γλώσσα, καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:[3]

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Α}\Delta}{\mathrm{Β}\Delta} &= \lambda \Leftrightarrow \\
\frac{\mathrm{Α}\Delta\cdot\mathrm{ΓΑ}}{\mathrm{Β}\Delta\cdot\mathrm{ΓΑ}} &= \lambda \Leftrightarrow \\
\frac{\mathrm{Α}\Delta\cdot\mathrm{ΓΑ}}{2(\mathrm{ΑΒΓ})} &= \lambda \Leftrightarrow \\
\frac{2\mathrm{Α}\Delta\cdot\mathrm{ΓΑ}}{(\mathrm{ΑΒΓ})} &= 4\lambda
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Υπάρχουν διάφορες υποθέσεις για το ρόλο που έπαιζαν οι συγκεκριμένες προτάσεις στην αρχαία γεωμετρία, όπως π.χ. ότι σχετίζονταν με υπολογιστικές διαδικασίες.[4]

[3] Υπενθυμίζουμε ότι στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ήταν άγνωστοι.

[4] Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι η σχέση (1.2) αποτελεί ειδική περίπτωση μιας γνωστής τριγωνομετρικής ταυτότητας που είναι άμεση συνέπεια του νόμου των συνημιτόνων (βλ. ενότητα 3).

Θα εξετάσουμε μερικές ειδικές περιπτώσεις αμβλυγώνιων τριγώνων χρησιμοποιώντας τον όρο «τετραγωνική υπεροχή» για το εμβαδόν $2\text{ΑΔ} \cdot \text{ΓΑ}$, δηλαδή τη διαφορά του τετραγώνου που κατασκευάζεται πάνω στη μεγαλύτερη πλευρά από το άθροισμα των τετραγώνων που κατασκευάζονται πάνω στις δύο άλλες πλευρές.

Αν π.χ. $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = 135°$, τότε το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ είναι ισοσκελές και άρα $\lambda = 1$. Σύμφωνα με τη σχέση (1.2), στην περίπτωση αυτή η «τετραγωνική υπεροχή» έχει τετραπλάσιο εμβαδόν από το τρίγωνο ΑΒΓ. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της ασυμμετρίας. Αν π.χ. είναι $\widehat{\text{ΒΑΓ}} = 150°$, τότε το τρίγωνο ΔΑΒ έχει γωνίες $90° - 30° - 60°$, ισχύει $\lambda = \sqrt{3}$ και ο λόγος της «τετραγωνικής υπεροχής» προς το τρίγωνο είναι $4\sqrt{3} = 6,928203...$

Για τους αρχαίους Έλληνες, που δεν γνώριζαν τους άρρητους αριθμούς και τις δεκαδικές αναπαραστάσεις, μια τυπική υπολογιστική διαδικασία εδώ θα ήταν η χρήση ρητών προσεγγίσεων του ασύμμετρου λόγου $\frac{\text{ΔΑ}}{\text{ΔΒ}} = \sqrt{3}$ των δύο καθέτων πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου ΔΑΒ, όπως π.χ. οι $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$. [5]

Με αυτό το δεδομένο συμπεραίνουμε από την (1.2) ότι σε αμβλυγώνιο τρίγωνο που έχει γωνία 150°, ο λόγος της «τετραγωνικής υπεροχής» προς το τρίγωνο περιέχεται μεταξύ των ρητών

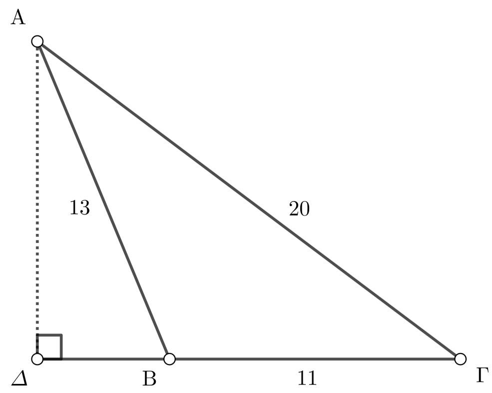
$$\frac{1060}{153} = 6\frac{142}{153} \quad \text{και} \quad \frac{1351}{195} = 6\frac{181}{195}.$$

Δηλαδή το εμβαδόν της «τετραγωνικής υπεροχής» σε αυτή την περίπτωση είναι σχεδόν επταπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.[6]

2 Η σύνδεση των επεκτάσεων του Πυθαγόρειου θεωρήματος με τις εφαρμογές και την Τριγωνομετρία

Οι πρώτες εφαρμογές των επεκτάσεων του Πυθαγόρειου θεωρήματος σε προβλήματα υπολογισμών εμφανίζονται στα *Μετρικά* του Ήρωνα (1ος αι. μ.Χ.). Σε αντίθεση με τον αυστηρά θεωρητικό και γεωμετρικό χαρακτήρα των προτάσεων στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, ο Ήρων τις χρησιμοποιεί ως αλγοριθμικές διαδικασίες για να υπολογίσει τις γωνίες και τα ύψη ενός τριγώνου όταν δίνονται τα μήκη των πλευρών του.

Το επόμενο παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό: Για να υπολογίσει το εμβαδόν του αμβλυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές ΑΒ = 13, ΒΓ = 11 και ΑΓ = 20 μονάδες, ο Ήρων φέρει το ύψος ΑΔ και περιγράφει ένα προς ένα τα βήματα της διαδικασίας ([4], σσ.16-17):



$$\text{ΑΓ}^2 = 20^2 = 400$$

$$\text{ΒΓ}^2 = 11^2 = 121$$

$$\text{ΑΒ}^2 = 13^2 = 169$$

$$2\text{ΓΒ} \cdot \text{ΒΔ} = 400 - (121 + 169) = 110$$

$$\text{ΓΒ} \cdot \text{ΒΔ} = 55$$

$$\text{ΒΔ} = 55 : 11 = 5 \;\; (\text{η προβολή})$$

$$\text{ΑΔ}^2 = 169 - 25 = 144$$

$$\text{ΑΔ} = 12 \;\; (\text{το ύψος})$$

$$\text{ΑΔ} \cdot \text{ΒΓ} = 132$$

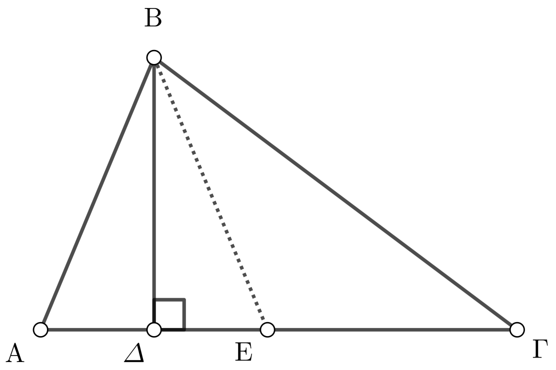
$$(\text{ΑΒΓ}) = 66 \;\; (\text{το εμβαδόν})$$

Η εφαρμογή των επεκτάσεων του Πυθαγόρειου θεωρήματος σε προβλήματα μετρήσεων διατηρήθηκε αναλλοίωτη πολλούς αιώνες, αναμένοντας την άφιξη της Τριγωνομετρίας! Δηλαδή την επινόηση και συμβολική αναπαράσταση των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας, με τη βοήθεια των οποίων οι δύο γεωμετρικές προτάσεις συγχωνεύονται στη μορφή ενός εύχρηστου αλγεβρικού τύπου (νόμος συνημιτόνων). Αξίζει να σημειωθεί ότι από την αρχαιότητα ακόμη είχε επινοηθεί ένας μετασχηματισμός των προτάσεων αυτών έτσι ώστε να διευκολύνεται ο υπολογισμός των προβολών. Από μια σχετική εφαρμογή που περιγράφει ο μεγάλος αστρονόμος Κλαύδιος Πτολεμαίος στο βιβλίο VI της *Μαθηματικής Συντάξεως* (Αλμαγέστης), φαίνεται ότι ο μετασχηματισμός αυτός είχε την εξής μορφή:

Αν σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΒΓ το ΒΔ είναι ύψος και το Ε συμμετρικό της κορυφής Α ως προς το Δ, τότε τα τμήματα ΑΓ και ΕΓ είναι αντιστοίχως ίσα με το άθροισμα και τη διαφορά των προβολών ΔΑ και ΔΓ των πλευρών ΒΑ και ΒΓ πάνω στην ΑΓ.

[5] Αυτές οι προσεγγίσεις χρησιμοποιήθηκαν από τον Αρχιμήδη στο περίφημο έργο του *Κύκλου Μέτρησις*, χωρίς καμιά ένδειξη για τον τρόπο με τον οποίο υπολογίστηκαν.

[6] Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μακρινός «πρόγονος» των γεωμετρικών ανισοτήτων που θα μας απασχολήσουν εκτενώς στη συνέχεια (βλ. ενότητες 4, 5 και 6).



Από το θεώρημα της οξείας γωνίας

$$\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 - 2\mathrm{A\Gamma}\cdot\Delta\mathrm{A} \tag{2.1}$$

προκύπτουν διαδοχικά οι σχέσεις:

$$\mathrm{B\Gamma}^2 - \mathrm{BA}^2 = \mathrm{A\Gamma}\cdot(\mathrm{A\Gamma} - \Delta\mathrm{A}) - \mathrm{A\Gamma}\cdot\Delta\mathrm{A}$$

$$(\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{BA})(\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{BA}) = \mathrm{A\Gamma}\cdot\Delta\Gamma - \mathrm{A\Gamma}\cdot\Delta\mathrm{A}$$

$$(\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{BA})(\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{BA}) = \mathrm{A\Gamma}\cdot(\Delta\Gamma - \Delta\mathrm{A})$$

$$(\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{BA})(\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{BA}) = \mathrm{A\Gamma}\cdot\mathrm{E\Gamma}$$

και τελικά, στη μορφή αναλογίας:

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{BA}}{\mathrm{E\Gamma}} \tag{2.2}$$

Όταν δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου, τότε από την (2.2) υπολογίζεται η διαφορά των προβολών ΕΓ, η οποία μαζί με το γνωστό άθροισμά τους (δηλαδή την πλευρά ΑΓ) παρέχει αμέσως τα μήκη των δύο προβολών (σύμφωνα με τις θεμελιώδεις ταυτότητες

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2},$$

όταν $\alpha > \beta$). Είναι χαρακτηριστικό ότι δεκαπέντε αιώνες μετά τον Πτολεμαίο το αποτέλεσμα αυτό εξακολουθούσε να αποτελεί βασικό εργαλείο στις εφαρμογές. Για παράδειγμα, ο εφευρέτης των λογαρίθμων John Napier το διατυπώνει στο *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (*Περιγραφή του θαυμάσιου κανόνα των λογαρίθμων*, 1614) ως ιδιαίτερη πρόταση με τον εξής τρόπο ([5], σ.38):

> *Το άθροισμα των προβολών είναι προς το άθροισμα των πλευρών όπως η διαφορά των πλευρών προς τη διαφορά των προβολών.*

Η μορφή αναλογίας διευκολύνει ιδιαίτερα τη χρήση των λογαρίθμων που εισάγει στο έργο του ο Ναπιερ, επειδή από την (2.2) προκύπτει ότι

$$\ln(\mathrm{A\Gamma}) - \ln(\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{BA}) = \ln(\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{BA}) - \ln(\mathrm{E\Gamma})$$

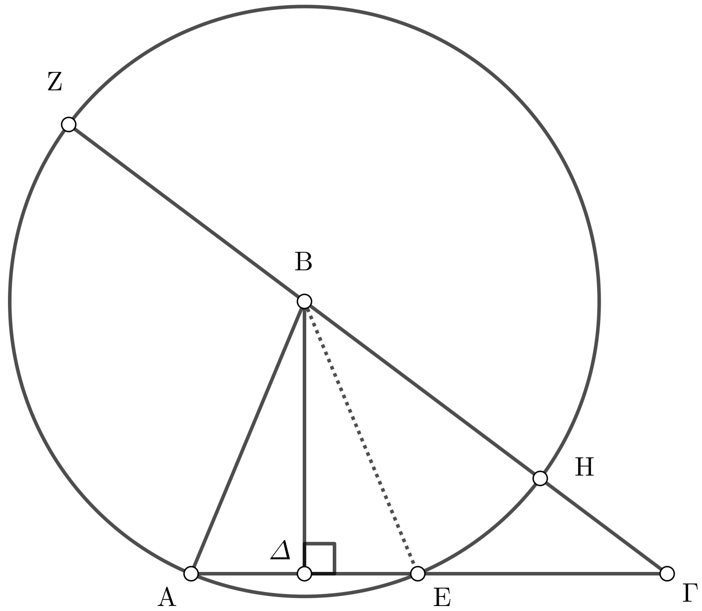
Με τον τρόπο αυτό παρακάμπτονται οι πολλαπλασιασμοί και οι διαιρέσεις και γίνεται δυνατός ο ταχύς υπολογισμός των προβολών (και εν συνεχεία του ύψους και του εμβαδού) τριγώνων με μήκη πλευρών πολυψήφιους αριθμούς. Ο Napier χρησιμοποιεί ως παράδειγμα το τρίγωνο με πλευρές $\mathrm{B\Gamma} = 57955$, $\mathrm{A\Gamma} = 58892$ και $\mathrm{BA} = 26302$, οπότε από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι

$$\ln(58892) - \ln(84257) = \ln(31653) - \ln(\mathrm{E\Gamma})$$

Χρησιμοποιώντας τους λογαριθμικούς πίνακες που είχε κατασκευάσει, ο Napier βρίσκει ότι η διαφορά των δύο προβολών είναι $\mathrm{E\Gamma} = 45286$. Επειδή γνωρίζουμε και το άθροισμά τους $\mathrm{A\Gamma} = 58892$, προκύπτει εύκολα ότι οι ζητούμενες προβολές είναι $\Delta\Gamma = 52089$ και $\Delta\mathrm{A} = 6803$.[7]

Η προηγούμενη απόδειξη της (2.2) στηρίχτηκε σε ορισμένους μετασχηματισμούς του θεωρήματος οξείας γωνίας με χρήση προτάσεων της «γεωμετρικής άλγεβρας». Η επινόηση όμως της συμβολικής Άλγεβρας στα τέλη του 16ου αιώνα άνοιξε τον δρόμο για εναλλακτικές αποδείξεις.

Η επόμενη, που δόθηκε από τον François Viète στο έργο του *Canon mathematicus* (1579), αποτελεί ουσιαστικά την πρώτη εμφάνιση του «νόμου των συνημιτόνων»([6], σ.177): Στο σχήμα (όπου Ε είναι το συμμετρικό του Α ως προς το Δ) σύμφωνα με το «θεώρημα των τεμνομένων χορδών»[8] ισχύει διαδοχικά:



[7]Οι λογάριθμοι του Napier δεν συμπίπτουν ακριβώς με τους λεγόμενους σήμερα νεπέριους ή φυσικούς λογάριθμους, αλλά αυτό έχει ελάχιστη επίδραση στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων του.

[8]Το «θεώρημα των τεμνομένων χορδών» αποδεικνύεται από τον Ευκλείδη στην πρόταση 36 του βιβλίου III, των *Στοιχείων* με τη βοήθεια των προτάσεων της «γεωμετρικής άλγεβρας» του βιβλίου II.

$$\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{E\Gamma} = \mathrm{Z\Gamma} \cdot \mathrm{H\Gamma}$$

$$\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{E\Gamma} = (\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{BZ})(\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{BH})$$

$$\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{E\Gamma} = (\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{BA})(\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{BA})$$

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{BA}}{\mathrm{E\Gamma}}$$

δηλαδή η σχέση (2.2). O Viète, αξιοποιώντας τις δυνατότητες του συμβολικού λογισμού και των τριγωνομετρικών σχέσεων, μετασχηματίζει την τελευταία διαδοχικά ως εξής:

$$(\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{BA})(\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{BA}) = \mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{E\Gamma}$$

$$\mathrm{B\Gamma}^2 - \mathrm{BA}^2 = \mathrm{A\Gamma} \cdot (\mathrm{A\Gamma} - 2\mathrm{A\Delta})$$

$$\mathrm{B\Gamma}^2 - \mathrm{BA}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 - 2\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{A\Delta}$$

$$\mathrm{B\Gamma}^2 - \mathrm{BA}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2 - 2\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{BA} \cdot \sigma\upsilon\nu \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma$$

$$2\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{BA} \cdot \sigma\upsilon\nu \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma = \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{BA}^2 - \mathrm{B\Gamma}^2$$

$$\frac{2\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{BA}}{\mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{BA}^2 - \mathrm{B\Gamma}^2} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\Gamma}$$

Χρησιμοποιώντας τους όρους «βάση» για την πλευρά ΒΓ, «σκέλη» για τις πλευρές ΑΓ, ΒΑ και «κορυφή» για το Α, ο Viète διατυπώνει την τελευταία σχέση ως εξής:

> *Όπως είναι το διπλάσιο του ορθογωνίου που σχηματίζουν τα σκέλη προς τη διαφορά (του αθροίσματος) των τετραγώνων των σκελών από το τετράγωνο της βάσης, έτσι είναι το ολικό ημίτονο (= ημ90°) προς το συμπληρωματικό ημίτονο (= συνημίτονο) της γωνίας της κορυφής.*

Αυτή είναι η πρώτη γνωστή εμφάνιση του νόμου των συνημιτόνων, η οποία με τους καθιερωμένους σήμερα συμβολισμούς γράφεται στη μορφή:

$$\frac{2\beta\gamma}{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu \mathrm{A}} \tag{2.3}$$

Η προηγούμενη διατύπωση και απόδειξη του νόμου των συνημιτόνων από τον εφευρέτη της συμβολικής Άλγεβρας έχει μια ευρύτερη σημασία, καθώς το έργο του Viète σηματοδοτεί το πέρασμα στα Μαθηματικά της νεώτερης εποχής. Η ανάπτυξή τους από εκείνη την εποχή και μετά χαρακτηρίζεται από τη συνεχή διείσδυση του αλγεβρικού λογισμού σε κάθε πεδίο μαθηματικής δραστηριότητας. Ο νόμος των συνημιτόνων αποτελεί τυπικό δείγμα αυτής της εξέλιξης, καθώς συνοψίζει σε μια ενιαία συμβολική αναπαράσταση τις «δίδυμες» γεωμετρικές προτάσεις ΙΙ 12 και ΙΙ 13 των Στοιχείων.

3 Από τα γεωμετρικά προβλήματα και τις εφαρμογές στις τριγωνομετρικές ταυτότητες

Η επινόηση των αλγεβρικών και τριγωνομετρικών μεθόδων και η εφαρμογή τους στην επίλυση κλασικών γεωμετρικών προβλημάτων αποδείχθηκε εξαιρετικά αποτελεσματική και οδήγησε σε μια ραγδαία ανάπτυξη της σχετικής έρευνας. Ένα μικρό δείγμα αυτής της αποτελεσματικότητας μπορούν να μας δώσουν ορισμένοι μετασχηματισμοί της καθιερωμένης μορφής του νόμου των συνημιτόνων

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu \mathrm{A} \tag{3.1}$$

Αρχίζουμε με ένα μετασχηματισμό που εισάγει στην (3.1) το εμβαδόν του τριγώνου με την αντικατάσταση $\beta\gamma = \frac{2\mathrm{E}}{\eta\mu \mathrm{A}}$:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu \mathrm{A} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\frac{2\mathrm{E}}{\eta\mu \mathrm{A}}\sigma\upsilon\nu \mathrm{A} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 4\mathrm{E}\sigma\varphi \mathrm{A} \Leftrightarrow$$

$$4\sigma\varphi \mathrm{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{\mathrm{E}} \tag{3.2}$$

Η ισότητα (3.2) συνοψίζει τις γεωμετρικές προτάσεις 64 και 65 των *Δεδομένων* του Ευκλείδη (βλ. ενότητα 1) και αποδίδει σε αυτές ένα συγκεκριμένο νόημα: Η διαφορά του τετραγώνου μιας πλευράς από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών (τετραγωνική υπεροχή ή έλλειψη) έχει προς το εμβαδόν του τριγώνου ένα λόγο που εξαρτάται από τη συνεφαπτομένη της δεδομένης γωνίας. Οποιοδήποτε λοιπόν σκοπό και αν εξυπηρετούσε η θεώρηση αυτού του λόγου κατά την αρχαιότητα, μπορούμε σήμερα να αποκαταστήσουμε μια συναρτησιακή σχέση ανάμεσα στη δεδομένη γωνία και το συγκεκριμένο λόγο, και να τη μελετήσουμε χρησιμοποιώντας όλα τα εργαλεία που έχουμε στη διάθεσή μας. Χρησιμοποιώντας π.χ. τις ισότητες που παράγονται κυκλικά από την (3.2), παίρνουμε με πρόσθεση κατά μέλη τη σχέση

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\mathrm{E}} = 4\left(\sigma\varphi \mathrm{A} + \sigma\varphi \mathrm{B} + \sigma\varphi \Gamma\right) \tag{3.3}$$

Είναι βέβαιο ότι αυτό το αποτέλεσμα, που παρέχει μια σημαντική πληροφορία για τη σχέση του εμβαδού ενός τριγώνου με τα εμβαδά των τριών τετραγώνων επί των πλευρών του, θα το εκτιμούσαν ιδιαίτερα ο Ευκλείδης και οι αρχαίοι ομότεχνοί του! Μια δεύτερη ομάδα μετασχηματισμών, που εισάγουν στο νόμο των συνημιτόνων το άθροισμα ή τη διαφορά των πλευρών β, γ του τριγώνου, είναι η εξής:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu \mathrm{A} \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma - 2\beta\gamma - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 = (\beta+\gamma)^2 - 2\beta\gamma(1+\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}) \tag{3.4}$$

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma - 2\beta\gamma - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} \Leftrightarrow$$
$$\alpha^2 = (\beta-\gamma)^2 + 2\beta\gamma(1-\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}) \tag{3.5}$$

Εισάγοντας στις (3.4) και (3.5) το εμβαδόν του τριγώνου με την αντικατάσταση

$$\beta\gamma = \frac{2\mathrm{E}}{\eta\mu\mathrm{A}},$$

προκύπτει το ζεύγος των ισοδυνάμων με αυτές ταυτοτήτων:

$$\alpha^2 = (\beta+\gamma)^2 - 4\mathrm{E}\frac{1+\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}}{\eta\mu\mathrm{A}} = (\beta+\gamma)^2 - 4\mathrm{E}\sigma\varphi\frac{\mathrm{A}}{2} \tag{3.6}$$

$$\alpha^2 = (\beta-\gamma)^2 + 4\mathrm{E}\frac{1-\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}}{\eta\mu\mathrm{A}} = (\beta-\gamma)^2 + 4\mathrm{E}\epsilon\varphi\frac{\mathrm{A}}{2} \tag{3.7}$$

Από τις (3.6) και (3.7) προκύπτει το ζεύγος ταυτοτήτων:

$$\begin{aligned} \sigma\varphi\tfrac{\mathrm{A}}{2} &= \tfrac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{4\mathrm{E}} = \\ \tfrac{(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)}{4\mathrm{E}} &= \tfrac{\tau(\tau-\alpha)}{\mathrm{E}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \epsilon\varphi\tfrac{\mathrm{A}}{2} &= \tfrac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{4\mathrm{E}} = \\ \tfrac{(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}{4\mathrm{E}} &= \tfrac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\mathrm{E}} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Οι προηγούμενες ταυτότητες παρουσιάζουν κυρίως θεωρητικό ενδιαφέρον, επειδή διευκολύνουν σημαντικά ορισμένες μακροσκελείς αποδείξεις. Για παράδειγμα, από τις ταυτότητες (3.8) και (3.9) προκύπτει άμεσα με πολλαπλασιασμό κατά μέλη ο τύπος του Ήρωνα για το εμβαδόν ενός τριγώνου

$$\mathrm{E} = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}.$$

Η αρχαία, αμιγώς γεωμετρική, μακροσκελής και περίπλοκη απόδειξη αυτής της σχέσης, αποτελεί ένα εξαίρετο δείγμα της μεγάλης φαντασίας και επινοητικότητας των Ελλήνων γεωμετρών.[9] Αντίθετα η σύγχρονη, αλγεβρική μορφή του τύπου του Ήρωνα επιδέχεται διάφορους μετασχηματισμούς με σχεδόν «αυτόματο» τρόπο. Π.χ. με εκτέλεση πράξεων βρίσκουμε ότι γράφεται ισοδύναμα στις ακόλουθες μορφές:

$$16\mathrm{E}^2 = 2\left(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2\right) - \left(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\right) \Leftrightarrow$$

$$16\mathrm{E}^2 + 2\left(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\right) = \left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \sqrt{16\mathrm{E}^2 + 2\left(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\right)}. \tag{3.10}$$

Οι ισότητες αυτές είναι σήμερα πολύ χρήσιμες στις αποδείξεις γεωμετρικών ανισοτήτων, παρά το γεγονός ότι ο Ήρων θα δυσκολευόταν να αναγνωρίσει ότι έχουν σχέση με το εμβαδόν ενός τριγώνου! Οι προηγούμενες ταυτότητες (μαζί με αναρίθμητες άλλες) αποτελούσαν για αρκετές δεκαετίες βασικές ασκήσεις των σχολικών Μαθηματικών και περιλαμβάνονταν στα αντίστοιχα διδακτικά βιβλία (βλ. π.χ. [8], σσ.63-65 & [9], σσ.73-75). Η διδασκαλία τους είχε όμως «ασκησιολογικό» προσανατολισμό, χωρίς αναφορές στη γεωμετρική ερμηνεία ή τις εφαρμογές τους. Π.χ. η ταυτότητα (3.3) είχε τεθεί το 1949 ως θέμα των εισαγωγικών εξετάσεων στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών ενώ σε ένα μεταγενέστερο σχολικό βιβλίο, μετά την απόδειξη των ταυτοτήτων (3.1), (3.2) και (3.3), ο συγγραφέας παραθέτει την ακόλουθη «μεθοδολογική» παρατήρηση ([9], σ.66):

> *Οι ανωτέρω τύποι λύουν πολύπλοκα προβλήματα, εις τα οποία εμφανίζονται αι παραστάσεις* $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\sigma\varphi\mathrm{A}+\sigma\varphi\mathrm{B}+\sigma\varphi\Gamma$, $\beta^2+\gamma^2-\alpha^2$ *κ.λ.π.*

Η ουσιαστική σημασία των προηγούμενων τριγωνομετρικών και αλγεβρικών σχέσεων, που παράγονται διαδοχικά από το νόμο των συνημιτόνων, μπορεί να εκτιμηθεί αν λάβουμε υπόψη την ανισοτική διατύπωση των αρχαίων «προγόνων» αυτού του θεωρήματος και τη συνδυάσουμε με τις νεώτερες εξελίξεις στο ευρύ πεδίο των γεωμετρικών ανισοτήτων.

4 Από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες στις γεωμετρικές ανισότητες

Όπως έχουμε αναφέρει στην πρώτη ενότητα της εργασίας, οι αρχαίες γεωμετρικές προτάσεις των Στοιχείων για τα τετράγωνα επί των πλευρών τριγώνου (θεωρήματα οξείας και αμβλείας γωνίας) είχαν μία σαφή ανισοτική διατύπωση. Μια αντίστοιχη ανισοτική προσέγγιση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων μπορεί να γίνει σήμερα αν τις συνδυάσουμε με τις γεωμετρικές ανισότητες. Για παράδειγμα η ταυτότητα (3.3) συνδέεται στενά με τις δύο επόμενες σημαντικές ανισότητες:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq 4\sqrt{3}\mathrm{E} \tag{4.1}$$

$$\sigma\varphi\mathrm{A}+\sigma\varphi\mathrm{B}+\sigma\varphi\Gamma \geq \sqrt{3} \tag{4.2}$$

Η ανισότητα (4.1) δημοσιεύτηκε το 1919 στο [10] από τον Roland Weitzenböck (1885-1955), καθηγητή Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο Karl-Ferdinand της Πράγας και φέρει σήμερα το όνομά του. Ιδιαίτερα γνωστή έγινε

[9] Για μια αναλυτική παρουσίαση της γεωμετρικής απόδειξης του Ήρωνα βλ. στο [7].

τη δεκαετία του 1960 όταν τέθηκε ως θέμα της 3ης Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας (1961) και σήμερα υπάρχει ένα μεγάλο πλήθος διαφορετικών αποδείξεων της.[10] Η ανισότητα (4.2) δημοσιεύτηκε το 1933 στο [13] από τον Νικόλαο Κριτικό (1894-1986), καθηγητή Μαθηματικών στο Ε.Μ.Π. Στη βιβλιογραφία όμως η ανισότητα αυτή αποδίδεται στον καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Α.Π.Θ. Θεόδωρο Βαρόπουλο (1894-1957) που δημοσίευσε το 1934 στο [14] μία απόδειξη της (4.2) με το χαρακτηρισμό «απλή απόδειξις της προτάσεως του κ. Κριτικού».[11] Με το όνομα του Κριτικού αντίθετα αναφέρεται στη βιβλιογραφία μια γενίκευση της ανισότητας (4.2) (και της αντίστοιχης για τις εφαπτομένες) που δημοσιεύτηκαν το 1935 στο [20]. Στο εύλογο ερώτημα, για ποιο λόγο οι προηγούμενες ανισότητες θεωρούνται τόσο σημαντικές και αποκτούν ιδιαίτερες επωνυμίες, υπάρχει μια εξίσου εύλογη απάντηση: Εκτός από το αμιγώς μαθηματικό ενδιαφέρον που παρουσιάζουν (κυρίως τις αποδεικτικές μεθόδους, τις βελτιώσεις και γενικεύσεις) έχουν επίσης μια ιδιαίτερη γεωμετρική ερμηνεία που συνδέεται απ' ευθείας με την αρχαία παράδοση. Η (4.1) μας πληροφορεί ουσιαστικά ότι τα τρία τετράγωνα που κατασκευάζονται στις πλευρές ενός τριγώνου καλύπτουν όλα μαζί μια επιφάνεια που σχεδόν υπερβαίνει το επταπλάσιο της επιφάνειας του τριγώνου. Μια αντίστοιχη ερμηνεία μπορεί να δοθεί και στην (4.2), αν λάβουμε υπόψη όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα για την ταυτότητα (3.2) και τις τετραγωνικές υπεροχές ή ελλείψεις.[12] Η μεγάλη ευελιξία όμως του αλγεβρικού λογισμού φαίνεται στον ακόλουθο μετασχηματισμό της ανισότητας (4.1), που μας αποκαλύπτει μία διαφορετική και μάλλον απροσδόκητη γεωμετρική ερμηνεία:

$$\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\beta^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\gamma^2\sqrt{3}}{4} \geq 3\mathrm{E} \tag{4.1α}$$

Δηλαδή τα ισόπλευρα τρίγωνα που κατασκευάζονται στις πλευρές ενός τριγώνου καλύπτουν και τα τρία μαζί μια επιφάνεια που υπερβαίνει ή ισούται με το τριπλάσιο της επιφάνειας του τριγώνου. Αυτή η σχεδόν αυτόματη σύνδεση και μετάβαση από τα τετράγωνα στα ισόπλευρα τρίγωνα, είναι πολύ πιο δύσκολο να πραγματοποιηθεί (και να αποδειχθεί) μέσα σ' ένα αμιγώς γεωμετρικό πλαίσιο.[13] Είναι επίσης αξιοσημείωτο ότι η πρώτη εμφάνιση των ανισοτήτων (4.1) και (4.2) δεν έγινε σε κάποια συλλογή προβλημάτων για τα σχολικά ή διαγωνιστικά Μαθηματικά, αλλά συνδέθηκε με συγκεκριμένα προβλήματα και εφαρμογές. Τα παρακάτω αποσπάσματα από τις αντίστοιχες εργασίες των Weitzenböck και Κριτικού είναι χαρακτηριστικά.

Ο Weitzenböck αναφέρει στην εισαγωγή της εργασίας του τα εξής ([10], σ.137):

> *Αν Ε είναι το εμβαδόν ενός επιπέδου τριγώνου με πλευρές α, β και γ τότε ισχύει πάντοτε*
>
> $$\frac{|\mathrm{E}|}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \leq \frac{1}{12}\sqrt{3}$$
>
> *Σε αυτή την εργασία δίνω τρεις απλές αποδείξεις αυτής της πρότασης, μία επέκταση στα επίπεδα ν-γωνα και την αντίστοιχη πρόταση για το τετράεδρο. Στη συνέχεια εξετάζεται ο ρόλος που παίζουν αυτές οι προτάσεις στη μηχανική των υλικών σημείων και σε ένα πρόβλημα του λογισμού προσαρμογών. Εξ όσων γνωρίζω, η παραπάνω ανισότητα μέχρι στιγμής έχει περάσει απαρατήρητη.*

Αντίστοιχα η εργασία του Κριτικού αρχίζει ως εξής ([13], σ.15):

> *Οι εφετεινές εισιτήριες εξετάσεις του Πολυτεχνείου μου έδωκαν αφορμήν να εύρω την ακόλουθον ελαχιστικήν ιδιότητα των γωνιών ενός τριγώνου της Ευκλειδείου Γεωμετρίας: Το άθροισμα των συνεφαπτομένων των γωνιών ενός τριγώνου είναι πάντοτε $\geq \sqrt{3}$, γίνεται δε ίσον με $\sqrt{3}$ όταν και μόνο όταν το τρίγωνον είναι ισόπλευρον.*
> *Με άλλα λόγια: η συνάρτησις*
>
> $$z = \sigma\varphi\mathrm{A} + \sigma\varphi\mathrm{B} + \sigma\varphi\Gamma$$

[10]Στο [11] (σσ.34–39] η ανισότητα Weitzenböck αποδεικνύεται με 16 τρόπους, ενώ στο [12] (σσ.170–174) αποδεικνύεται με 11 τρόπους. Στην επόμενη ενότητα θα ασχοληθούμε με ορισμένες από αυτές τις αποδείξεις, με στόχο να αναδείξουμε τις κεντρικές ιδέες στις οποίες στηρίζονται.

[11]Η απόδοση της συγκεκριμένης ανισότητας στον Βαρόπουλο γίνεται π.χ. στο [15] (σσ.28–29) και στο [16] (σ.76). Για το ζήτημα αυτό προκαλούν εντύπωση τα εξής στοιχεία: Η εργασία του Βαρόπουλου δημοσιεύτηκε στο Δελτίο της Ε.Μ.Ε. στις αρχές του 1934, αμέσως μετά τη δημοσίευση της εργασίας του Κριτικού στο Δελτίο Λειτουργών Δημοσίας Μέσης Παιδείας. Μερικούς μήνες αργότερα δημοσιεύτηκαν στο Παράρτημα του Δελτίου της Ε.Μ.Ε.(τεύχος Οκτωβρίου 1934) τρεις εργασίες από τους Γ. Κίζα, Σ. Χαλέβα και Γ. Ξηρουδάκη, οι οποίοι έκαναν αναφορά στην απόδειξη της ανισότητας (4.2) από τον Βαρόπουλο και έδιναν δύο νέες αποδείξεις, χωρίς καμία αναφορά στην απόδειξη του Κριτικού που είχε προηγηθεί! (βλ. σχετικά τα [17], [18] και [19]). Υπάρχουν πολλές ενδείξεις ότι τα προηγούμενα συνδέονται με ανταγωνισμούς και αντιπαραθέσεις στο εσωτερικό της μαθηματικής κοινότητας εκείνης της εποχής (ένα διαχρονικό φαινόμενο στη νεοελληνική μαθηματική εκπαίδευση). Λαμβάνοντας κυρίως υπόψη ότι η εργασία του Κριτικού δημοσιεύτηκε σε ένα βραχύβιο και εντελώς άγνωστο σήμερα περιοδικό ενώ η εργασία του Βαρόπουλου στο Δελτίο της Ε.Μ.Ε. που είχε διεθνή κυκλοφορία, θεωρούμε σκόπιμο να καθιερωθεί για την (4.2) η επωνυμία «Ανισότητα Κριτικού-Βαρόπουλου».

[12]Συμπληρωματικά αναφέρουμε ότι με μια ωραία εφαρμογή της (3.2) αποδεικνύεται επίσης η ισότητα $\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi\mathrm{A} + \sigma\varphi\mathrm{B} + \sigma\varphi\Gamma$, όπου ω είναι η λεγόμενη «γωνία Brocard» του τριγώνου ΑΒΓ, ενώ από την ανισότητα (4.2) προκύπτει ότι η γωνία αυτή είναι πάντοτε μικρότερη ή ίση των $30°$. Βλ. σχετικά στο [21] (τόμος 2, σσ.126 & 128) ή στο [22] (σ.439).

[13]Αυτή η γεωμετρική ερμηνεία κάνει επίσης δυνατή μια γεωμετρική απόδειξη της ανισότητας του Weitzenböck, με χρήση του σημείου Fermat (ή Steiner) ενός τριγώνου (βλ. σχετικά στο [23], σ.84).

των γωνιών A, B, Γ ενός μεταβλητού τριγώνου λαμβάνει την ελαχίστην της τιμήν δια $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \Gamma = \frac{\pi}{3}$. Δεν γνωρίζω αν η ανωτέρω ιδιότης έχει ήδη δημοσιευθεί εις την ξένην βιβλιογραφίαν.[14]

Όπως έχουμε αναφέρει, διαθέτουμε σήμερα ένα μεγάλο αριθμό αποδείξεων για τις ανισότητες (4.1) και (4.2). Στην επόμενη ενότητα θα εξετάσουμε ορισμένες από αυτές, ξεκινώντας από εκείνες που έδωσαν ο Weitzenböck το 1919 και ο Κριτικός το 1933, με κύριο στόχο να σκιαγραφήσουμε την εξέλιξη των αντίστοιχων μεθόδων.

5 Μερικές κλασικές αποδείξεις των ανισοτήτων Weitzenböck και Κριτικού-Βαρόπουλου.

Λαμβάνοντας υπόψη την ταυτότητα (3.3) γίνεται φανερό ότι οι ανισότητες (4.1) και (4.2) είναι ισοδύναμες, δηλαδή η απόδειξη της μιας συνεπάγεται την απόδειξη της άλλης. Στις πρώτες όμως αποδείξεις των δύο ανισοτήτων που έδωσαν ο Weitzenböck και ο Κριτικός δεν υπάρχει κανένα ίχνος αυτής της σύνδεσης. Ο Weitzenböck στην εργασία που δημοσίευσε το 1919 μετασχηματίζει αρχικά την (4.1) στη ισοδύναμη ανισότητα

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2+2\alpha^2\beta^2-48\mathrm{E}^2 \geq 0 \quad (5.1)$$

και παραθέτει τρεις τρόπους απόδειξης της τελευταίας. Στη δεύτερη και πιο στοιχειώδη χρησιμοποιεί την ταυτότητα[15]

$$16\mathrm{E}^2 = 2\left(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2\right)-\left(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4\right)$$

και ανάγει την ανισότητα (5.1) στην

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-\beta^2\gamma^2-\gamma^2\alpha^2-\alpha^2\beta^2 \geq 0.$$

Η τελευταία είναι όμως άμεση συνέπεια της βασικής ανισότητας

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy \geq 0. \quad (5.2)$$

Οι συγγραφείς του κλασικού για τις γεωμετρικές ανισότητες βιβλίου [15], υιοθετούν την ακόλουθη τριγωνομετρική απόδειξη της ανισότητας Weitzenböck, που είναι σαφώς απλούστερη και απαιτεί λιγότερες πράξεις ([15], σσ.42-43):

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\sqrt{3}\cdot\mathrm{E} =$$

$$2\left(\beta^2+\gamma^2\right)-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}-2\beta\gamma\sqrt{3}\eta\mu\mathrm{A} =$$

$$2\left(\beta^2+\gamma^2\right)-4\beta\gamma\left(\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\mathrm{A}\right)$$

$$= 2\left(\beta^2+\gamma^2\right)-4\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}-\mathrm{A}\right) \geq$$

$$2\left(\beta^2+\gamma^2\right)-4\beta\gamma = 2(\beta-\gamma)^2$$

Οι δύο προηγούμενες αποδείξεις χρησιμοποιούν διαφορετικά μαθηματικά εργαλεία αλλά από μεθοδολογική άποψη ακολουθούν την ίδια ακριβώς πορεία: Η διαφορά των δύο μελών της ανισότητας (4.1) μετασχηματίζεται σε μία μη αρνητική παράσταση. Ο Κριτικός στην εργασία για την ανισότητα (4.2) που δημοσίευσε το 1933 δείχνει αρχικά με χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και βασικών ανισοτήτων ότι το άθροισμα

$$z = \sigma\varphi\mathrm{A}+\sigma\varphi\mathrm{B}+\sigma\varphi\Gamma$$

είναι πάντοτε θετικό. Στη συνέχεια θέτει $x = \sigma\varphi\mathrm{A}$ και $y = \sigma\varphi\mathrm{B}$ και δείχνει ότι το z ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2+xy+y^2-z\,(x+y)+1 = 0. \quad (5.3)$$

Εκτελώντας το μετασχηματισμό

$$x = x'+\frac{z}{3}, y = y'+\frac{z}{3}$$

ανάγει την (5.3) στην

$$x'^2+x'y'+y'^2 = \frac{z^2}{3}-1$$

της οποίας το πρώτο μέλος είναι μη αρνητικό και άρα ισχύει $\frac{z^2}{3} \geq 1$ δηλαδή $z \geq \sqrt{3}$.

Η διαφορά αυτής της απόδειξης από τις προηγούμενες είναι ότι δεν απαιτεί εκ των προτέρων γνώση του δευτέρου μέλους της ανισότητας. Ο Κριτικός μετασχηματίζει διαδοχικά το πρώτο μέλος της (4.2) και προσδιορίζει την ελάχιστη τιμή του.[16] Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι νεώτεροι συγγραφείς που επιχείρησαν να προσαρμόσουν περισσότερο την απόδειξη του Κριτικού στη σχολική ύλη, μετασχημάτισαν τη διαφορά του πρώτου και δεύτερου μέλους της (4.2) σε ένα τριώνυμο 2ου βαθμού με μη αρνητικές τιμές (βλ. στο [21] τόμος 1, σ.126 και στο [22], σ.220).

[14] Ο Κριτικός δεν αναφέρει ποιο ήταν το θέμα των εισαγωγικών εξετάσεων του Ε.Μ.Π. το 1933 που τον οδήγησε στην απόδειξη της συγκεκριμένης ανισότητας. Υπάρχουν κάποιες ενδείξεις ότι αυτό αφορούσε την απόδειξη της σχέσης

$$\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}} = 1+\frac{1}{2}(\sigma\varphi\mathrm{A}+\sigma\varphi\mathrm{B}+\sigma\varphi\Gamma)$$

όπου Ε είναι το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ και E_1 το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα κέντρα των τετραγώνων που κατασκευάζονται επί των πλευρών του ΑΒΓ και εξωτερικά αυτού.

[15] Όπως είδαμε στην ενότητα 3, αυτή η ταυτότητα προκύπτει από τον τύπο του Ήρωνα, αλλά μπορεί επίσης να αποδειχθεί με απαλοιφή της γωνίας Α από τις σχέσεις

$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu\mathrm{A} \quad \text{και} \quad \alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}.$$

[16] Την ίδια μέθοδο, αλλά με διαφορετικό τρόπο προσδιορισμού της ελάχιστης τιμής χρησιμοποίησε και ο Βαρόπουλος στην «απλή» απόδειξη της (4.2) που δημοσίευσε το 1934. Στην Ελληνική βιβλιογραφία υπάρχουν επίσης διάφορες παραλλαγές αυτής της μεθόδου (βλ. π.χ. στο [24], σ.247 και στο [17]).

Η παρατήρηση αυτή δεν αφορά το μαθηματικό υπόβαθρο της συγκεκριμένης αποδεικτικής μεθόδου αλλά έχει ορισμένες ενδιαφέρουσες διδακτικές προεκτάσεις. Μια απόδειξη που αποκαλύπτει ταυτόχρονα τον τρόπο με τον οποίο το ένα μέλος μιας ανισότητας μετασχηματίζεται στο άλλο (ιδιαίτερα όταν το τελευταίο δεν είναι γνωστό), διαθέτει μεγάλη ευρετική αξία και μπορεί να οδηγήσει σε νέα αποτελέσματα. Μερικές «ευρετικές» αποδείξεις αυτού του είδους για την ανισότητα του Weitzenböck θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια της ενότητας.

Κατά την άποψή μας, τον τίτλο της πλέον στοιχειώδους απόδειξης θα μπορούσε να διεκδικήσει η επόμενη, στην οποία αξιοποιείται το 1ο θεώρημα της διαμέσου:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\alpha^2+2{\mu_\alpha}^2+\frac{\alpha^2}{2}=$$

$$2{\mu_\alpha}^2+\frac{3\alpha^2}{2}\geq$$

$$2\sqrt{2{\mu_\alpha}^2\cdot\frac{3\alpha^2}{2}}=2\sqrt{3}\alpha\mu_\alpha\geq$$

$$2\sqrt{3}\alpha\upsilon_\alpha=4\sqrt{3}\mathrm{E}.$$

Αυτή η απόδειξη υποβάλλει την ιδέα να αξιοποιηθούν με παρόμοιο τρόπο και άλλες γεωμετρικές προτάσεις για τα τετράγωνα επί των πλευρών τριγώνου. Φυσικά, η πρώτη που έρχεται στο νου είναι ο νόμος των συνημιτόνων. Έχοντας ως πρότυπο την προηγούμενη απόδειξη μετασχηματίζουμε αρχικά το νόμο των συνημιτόνων ως εξής:

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=2\beta^2+2\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\\&\geq 2\sqrt{2\beta^2 2\gamma^2}-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\\&=4\beta\gamma-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\end{aligned}.$$

Στο σημείο αυτό δεν είναι ορατή η δυνατότητα μιας περαιτέρω ελάττωσης που οδηγεί άμεσα στο δεύτερο μέλος της (4.1), όπως έγινε με την αντικατάσταση της διαμέσου από το αντίστοιχο ύψος στην προηγούμενη απόδειξη. Για το σκοπό αυτό θα καταφύγουμε σε μία κάπως εξεζητημένη εφαρμογή της ανισότητας Cauchy–Schwarz, μετασχηματίζοντας το συντελεστή 4 του δεύτερου μέλους ως εξής:

$$4=\sqrt{16}=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$\sqrt{\left(2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2\right)(\sigma\upsilon\nu^2\mathrm{A}+\eta\mu^2\mathrm{A})}\geq$$

$$\sqrt{\left(2\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+2\sqrt{3}\eta\mu\mathrm{A}\right)^2}=\left|2\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+2\sqrt{3}\eta\mu\mathrm{A}\right|\geq$$

$$2\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+2\sqrt{3}\eta\mu\mathrm{A}$$

Άρα η προηγούμενη ανισότητα γίνεται

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq$$

$$\left(2\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+2\sqrt{3}\cdot\eta\mu\mathrm{A}\right)\beta\gamma-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}=2\sqrt{3}\beta\gamma\eta\mu\mathrm{A}$$

και αντικαθιστώντας το $\beta\gamma\eta\mu\mathrm{A}=2\mathrm{E}$, καταλήγουμε στην

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq 4\sqrt{3}\mathrm{E}.$$ [17]

Η αναζήτηση εναλλακτικών αποδείξεων των γεωμετρικών ανισοτήτων δεν αποτελεί αυτοσκοπό αλλά μας δίνει τη δυνατότητα να συσχετίσουμε διαφορετικές ανισότητες μεταξύ τους και να εντοπίσουμε πιθανές βελτιώσεις και γενικεύσεις. Στο ευρύ και πολύ ενδιαφέρον πεδίο της βελτίωσης και γενίκευσης των ανισοτήτων Weitzenböck και Κριτικού-Βαρόπουλου θα αφιερώσουμε την τελευταία ενότητα της εργασίας.

6 Βελτιώσεις και γενικεύσεις των γεωμετρικών ανισοτήτων

Υπάρχουν πολλοί τρόποι μετασχηματισμού του αθροίσματος των τετραγώνων των πλευρών ενός τριγώνου, αλλά η προσπάθεια σύνδεσης τους με το εμβαδόν και η αξιοποίηση ορισμένων γνωστών ανισοτήτων μπορεί να οδηγήσει μερικές φορές σε απροσδόκητα αποτελέσματα. Μία τέτοια περίπτωση προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε τις ισότητες

[17] Είναι προφανές ότι ο μετασχηματισμός που επινοήθηκε για να εφαρμοστεί η ταυτότητα Cauchy-Schwarz στην προηγούμενη απόδειξη, προήλθε από τη γνώση του δευτέρου μέλος της ανισότητας (4.1). Με το ίδιο σκεπτικό θα μπορούσαμε να αποφύγουμε την εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz παρατηρώντας πως αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$4\beta\gamma-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\geq 4\sqrt{3}\mathrm{E}\Leftrightarrow$$

$$4\beta\gamma-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\geq 2\sqrt{3}\beta\gamma\eta\mu\mathrm{A}\Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{3}\eta\mu\mathrm{A}+2\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\leq 4.$$

Η τελευταία ισχύει επειδή

$$2\sqrt{3}\eta\mu\mathrm{A}+2\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}=$$

$$4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu\mathrm{A}+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\right)=$$

$$4\eta\mu\left(\mathrm{A}+\frac{\pi}{6}\right)\leq 4$$

Το ίδιο ισχύει και και για την φαινομενικά απλούστερη απόδειξη που προκύπτει από την ανισότητα:

$$16=\left(2\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+2\sqrt{3}\eta\mu\mathrm{A}\right)^2+\left(2\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}-2\sqrt{3}\eta\mu\mathrm{A}\right)^2\geq$$

$$\left(2\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}+2\sqrt{3}\eta\mu\mathrm{A}\right)^2$$

Η απόδειξη που δώσαμε δεν μπορεί να θεωρηθεί «ευρετική» με την έννοια που εξηγήσαμε παραπάνω. Η σημασία της όμως θα εκτιμηθεί στην επόμενη ενότητα, όταν ο ίδιος μετασχηματισμός θα αξιοποιηθεί σε μια σημαντική γενίκευση της ανισότητας Weitzenböck.

που παράγονται κυκλικά από την τριγωνομετρική ταυτότητα (3.7)

$$\alpha^2 = (\beta-\gamma)^2 + 4\mathrm{E}\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{A}}{2}$$

και τις προσθέσουμε κατά μέλη:

$$\begin{gathered}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2\\ +4\mathrm{E}\left(\varepsilon\varphi\tfrac{A}{2}+\varepsilon\varphi\tfrac{B}{2}+\varepsilon\varphi\tfrac{\Gamma}{2}\right)\end{gathered} \tag{6.1}$$

Επειδή για τις γωνίες κάθε τριγώνου ΑΒΓ ισχύει η ανισότητα [18]

$$\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{A}}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\mathrm{B}}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} \geq \sqrt{3}$$

συμπεραίνουμε από την ισότητα (6.1) ότι

$$\boxed{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq (\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2+4\sqrt{3}\mathrm{E} \quad (6.2)}$$

Η τελευταία ανισότητα, που βελτιώνει την

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq +4\sqrt{3}\mathrm{E}$$

κατά ένα μάλλον απροσδόκητο τρόπο, δημοσιεύτηκε το 1937 στο [25] από τους Paul Finsler (1894-1970), καθηγητή Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Ζυρίχης και Hugo Hadwiger (1908-1981), καθηγητή Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Βέρνης.[19] Είναι αξιοσημείωτο ότι οι Finsler και Hadwiger δεν αποδεικνύουν στην εργασία τους την (6.2) με τη μέθοδο που παρουσιάσαμε εδώ, αλλά την εξάγουν (όπως και την ανισότητα Weitzenböck) ως πόρισμα ορισμένων προτάσεων της γεωμετρίας του τριγώνου. Συγκεκριμένα, αν επί των πλευρών ενός τριγώνου και «εξωτερικά» ή «εσωτερικά» αυτού κατασκευαστούν ισόπλευρα τρίγωνα, τότε τα κέντρα τους και στις δύο περιπτώσεις σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο (τα τρίγωνα αυτά αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως 1ο και 2ο τρίγωνο του Ναπολέοντα). Οι Finsler και Hadwiger αναφέρουν (χωρίς απόδειξη) ότι μεταξύ του εμβαδού Ε, του αθροίσματος των τετραγώνων των πλευρών

$$S = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

του αρχικού τριγώνου και των αντίστοιχων μεγεθών

$$\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, S_1, S_2$$

στο 1ο και το 2ο τρίγωνο του Ναπολέοντα ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:[20]

$$\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_2 = \mathrm{E} \;\; (\mathrm{I})$$

$$S_1 + S_2 = S \;\; (\mathrm{II})$$

$$S + 4\sqrt{3}\mathrm{E} = 8\sqrt{3}E_1 \;\; (\mathrm{III})$$

$$S - 4\sqrt{3}\mathrm{E} = 8\sqrt{3}E_2 \;\; (\mathrm{IV})$$

Από την (IV) συνάγουν ότι

$$S - 4\sqrt{3}\mathrm{E} \geq 0$$

(δηλαδή την ανισότητα Weitzenböck), στη συνέχεια αναφέρουν (επίσης χωρίς απόδειξη) ότι αν

$$Q = (\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2,$$

τότε ισχύει επίσης η σχέση

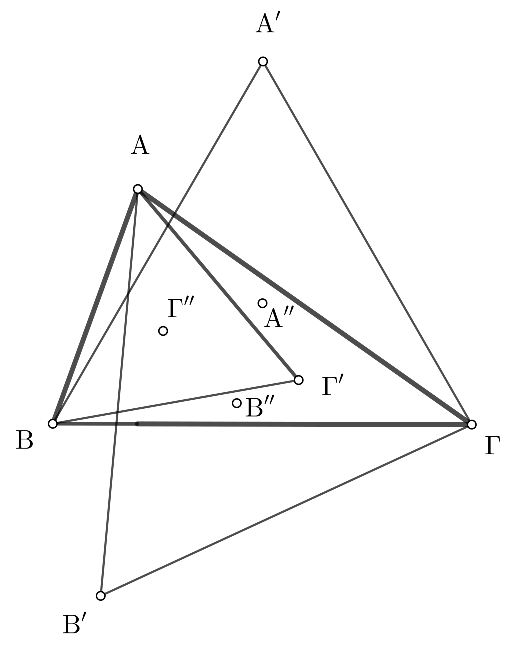
$$8\sqrt{3}E_2 = 2S_2 \geq Q \;\; (\mathrm{V})$$

και από τις (V) και (IV) καταλήγουν στην ανισότητα

$$S - 4\sqrt{3}\mathrm{E} \geq \mathrm{Q},$$

δηλαδή την ανισότητα Finsler-Hadwiger. Μια βασική σχέση για το μήκος της πλευράς του 2ου τριγώνου του Ναπολέοντα, από την οποία συνάγεται διαδοχικά ότι
α) το τρίγωνο είναι ισόπλευρο
β) η ανισότητα Weitzenböck και
γ) η ισότητα (IV), αποδεικνύεται ως εξής:

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Γράφουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ′, ΒΓΑ′, ΓΑΒ′ προς το «εσωτερικό» του ΑΒΓ όπως φαίνεται στο σχήμα.



[18] Η ανισότητα αυτή μπορεί να αποδειχθεί με πολλούς τρόπους, π.χ. με εφαρμογή της ανισότητας Jensen στη συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

[19] Μία ακόμη πιο απροσδόκητη βελτίωση της Finsler-Hadwiger αναφέρεται στο [26] (σ.353), ενώ ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η απόδειξή της από την ασθενέστερη ανισότητα Weitzenböck στο `https://mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=50&t=11296`

[20] Αποδείξεις αυτών των σχέσεων στην Ελληνική βιβλιογραφία υπάρχουν στο [21] (τόμος 2, σσ.247-250).

Ας είναι Α″, Β″, Γ″ τα περίκεντρα αυτών των τριγώνων. Εύκολα βρίσκουμε:

$$\mathrm{AB}'' = \frac{\beta}{\sqrt{3}},\ \mathrm{A\Gamma}'' = \frac{\gamma}{\sqrt{3}},\ \mathrm{B}''\hat{\mathrm{A}}\Gamma'' = \hat{\mathrm{A}} - 60^\circ$$

Από τον νόμο συνημιτόνων είναι

$$\mathrm{B}''\Gamma''^2 = \left(\frac{\beta}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\frac{\beta}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\gamma}{\sqrt{3}}\sigma\upsilon\nu\left(\hat{\mathrm{A}} - 60^o\right) =$$

$$\frac{\beta^2+\gamma^2}{3} - \frac{2\beta\gamma}{3}\left(\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}\frac{1}{2} + \eta\mu\mathrm{A}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$$

$$\frac{\beta^2+\gamma^2}{3} - \frac{\beta\gamma}{3}\cdot\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} - \frac{\beta\gamma\eta\mu\mathrm{A}\sqrt{3}}{3} =$$

$$\frac{\beta^2+\gamma^2}{3} - \frac{\beta\gamma}{3}\cdot\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} - \frac{2\sqrt{3}\mathrm{E}}{3} =$$

$$\frac{2\beta^2+2\gamma^2}{6} - \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{6} - \frac{4\sqrt{3}\mathrm{E}}{6} =$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\sqrt{3}\mathrm{E}}{6} \tag{6.3}$$

Λόγω της συμμετρίας της (6.3) προκύπτει ότι το τρίγωνο Α″Β″Γ″ είναι ισόπλευρο. Επειδή $\mathrm{B}''\Gamma''^2 \geq 0$ προκύπτει επίσης η ανισότητα Weitzenböck και τελικά η ισότητα (IV). Είναι επίσης γνωστές οι επόμενες ανισότητες που αποτελούν βελτιώσεις της ανισότητας Κριτικού-Βαρόπουλου:

$$\sigma\varphi\mathrm{A} + \sigma\varphi\mathrm{B} + \sigma\varphi\Gamma \geq \frac{\sqrt{3}}{9}\frac{\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta\gamma} \tag{6.4}$$

$$\sigma\varphi\mathrm{A} + \sigma\varphi\mathrm{B} + \sigma\varphi\Gamma \geq \frac{\tau}{3\rho} \tag{6.5}$$

Οι (6.4)[21] και (6.5) μπορούν να αποδειχθούν με αξιοποίηση της τριγωνομετρικής ταυτότητας (3.3). Η (6.4) γράφεται ισοδύναμα

$$9\alpha\beta\gamma \geq 4\sqrt{3}\mathrm{E}(\alpha+\beta+\gamma) \Leftrightarrow 9\cdot4\mathrm{ER} \geq 4\sqrt{3}\mathrm{E}2\tau \Leftrightarrow 3\sqrt{3}\mathrm{R} \geq 2\tau$$

Η τελευταία όμως είναι γνωστή (π.χ. προκύπτει με εφαρμογή της ανισότητας Jensen[22] στη συνάρτηση $\eta\mu x$ και την ταυτότητα

$$\eta\mu\mathrm{A} + \eta\mu\mathrm{B} + \eta\mu\Gamma = \frac{\tau}{\mathrm{R}}.$$

Επίσης η (6.5) γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4\tau\rho} \geq \frac{\tau}{3\rho} \Leftrightarrow$$

$$3\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right) \geq 4\tau^2 \Leftrightarrow$$

$$3\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right) \geq (\alpha+\beta+\gamma)^2$$

που είναι γνωστή και προφανής. Η (6.4) είναι ισχυρότερη από την ανισότητα Κριτικού-Βαρόπουλου αφού, σύμφωνα με την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, ισχύει

$$\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)(\alpha+\beta+\gamma) \geq$$

$$3\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\cdot 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} = 9\alpha\beta\gamma$$

Επίσης η (6.5) είναι ισχυρότερη της ανισότητας Κριτικού-Βαρόπουλου λόγω της γνωστής $\tau \geq 3\sqrt{3}\rho$.[23]

Η απόδειξη της ανισότητας του Weitzenböck με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz που δώσαμε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να οδηγήσει σε ορισμένες ενδιαφέρουσες γενικεύσεις.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει $x + y > 0$, $y + z > 0$, $z + x > 0$ και $xy + yz + zx > 0$, τότε από το νόμο των συνημιτόνων παίρνουμε

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} \Leftrightarrow$$

$$x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2 = (x+y)\beta^2 + (x+z)\gamma^2 - 2x\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$$

Με εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου βρίσκουμε ότι είναι

$$x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2 \geq$$

$$2\sqrt{(x+y)\,\beta^2\,(x+z)\,\gamma^2} - 2x\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} = \tag{6.6}$$

$$2\beta\gamma\sqrt{(x+y)\,(x+z)} - 2x\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$$

Μετασχηματίζουμε τον πρώτο όρο του δεύτερου μέλους ως εξής:

$$2\sqrt{(x+y)(x+z)} = 2\sqrt{x^2+xy+yz+zx} =$$

$$\sqrt{(2x)^2 + (2\sqrt{xy+yz+zx})^2} =$$

$$\sqrt{\left[(2x)^2 + (2\sqrt{xy+yz+zx})^2\right](\sigma\upsilon\nu^2\mathrm{A} + \eta\mu^2\mathrm{A})}.$$

Με εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz [24] συμπεραίνουμε από την τελευταία ότι είναι

$$2\sqrt{(x+y)(x+z)} \geq 2x\sigma\upsilon\nu\mathrm{A} + 2\sqrt{xy+yz+zx}\,\eta\mu\mathrm{A}$$

οπότε η ανισότητα (6.6) γίνεται

$$x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2 \geq 2\beta\gamma\eta\mu\mathrm{A}\sqrt{xy+yz+zx}.$$

---

[21] Η ανισότητα αυτή δημοσιεύτηκε το 1966 στο [27] από τον T.R. Curry.

[22] Μια απόδειξη με πιο στοιχειώδη μέσα υπάρχει στο [28], σ.68, θεώρημα 2.4.3.

[23] Αυτή προκύπτει άμεσα με εφαρμογή της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στους αριθμούς $\tau-\alpha$, $\tau-\beta$, $\tau-\gamma$.

[24] Η εναλλακτικά με αντίστοιχη προσαρμογή των μεθόδων που αναφέραμε στην υποσημείωση 17.

Αντικαθιστώντας στην τελευταία το $\beta\gamma\eta\mu\mathrm{A} = 2\mathrm{E}$ καταλήγουμε στην ανισότητα

$$x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2 \geq 4\mathrm{E}\sqrt{xy + yz + zx} \tag{6.7}$$

Από την τελευταία, που είναι γνωστή ως ανισότητα του Oppenheim[25], προκύπτει για $x = y = z$ η ανισότητα του Weitzenböck, ενώ για διαφορετικές τιμές των x, y, z προκύπτουν πολλές άλλες ενδιαφέρουσες ανισότητες. Αν π.χ. θέσουμε

$$x = \frac{p}{q+r}, y = \frac{q}{r+p}, z = \frac{r}{p+q}$$

με $p, q, r > 0$ τότε προκύπτει η

$$\frac{p}{q+r}\alpha^2 + \frac{q}{r+p}\beta^2 + \frac{r}{p+q}\gamma^2 \geq$$

$$4\mathrm{E}\sqrt{\frac{pq}{(q+r)(r+p)} + \frac{qr}{(r+p)(p+q)} + \frac{rp}{(p+q)(q+r)}}$$

Επειδή, όπως μπορεί εύκολα να αποδειχθεί, ισχύει

$$\frac{pq}{(q+r)(r+p)} + \frac{qr}{(r+p)(p+q)} + \frac{rp}{(p+q)(q+r)} \geq \frac{3}{4}$$

(ισοδυναμεί με την $p(q-r)^2 + q(r-p)^2 + r(p-q)^2 \geq 0$), καταλήγουμε στην

$$\boxed{\frac{p}{q+r}\alpha^2 + \frac{q}{r+p}\beta^2 + \frac{r}{p+q}\gamma^2 \geq 2\sqrt{3}\mathrm{E}} \tag{6.8}$$

Η τελευταία είναι γνωστή ως ανισότητα του Τσίντσιφα[26] και αποτελεί μια άλλης μορφής γενίκευση της ανισότητας του Weitzenböck. Μια ακόμη γενίκευση της ανισότητας Weitzenböck που οφείλεται επίσης στον Τσίντσιφα είναι η ακόλουθη ([26], σ.375): Αν $\mathrm{AB\Gamma}$, $\mathrm{A'B'\Gamma'}$ είναι δύο τρίγωνα με εμβαδά E, E', τότε ισχύει

$$\boxed{\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \geq 4\sqrt{3\mathrm{EE}'}} \tag{6.9}$$

Θα την αποδείξουμε ως εφαρμογή της ανισότητας (6.7) του Oppenheim σε βοηθητικό κατάλληλο τρίγωνο, μια μέθοδο που βρίσκει ευρεία εφαρμογή στις γεωμετρικές ανισότητες. Γνωρίζουμε ότι αν τα α, β, γ είναι πλευρές τριγώνου, τότε και τα $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{\gamma}$ είναι πλευρές τριγώνου με εμβαδόν

$$\mathrm{E}_r = \frac{1}{2}\sqrt{\rho(4R+\rho)}$$

([16], σελ. 139). Εφαρμόζουμε την ανισότητα Oppenheim στο τρίγωνο αυτό και έχουμε

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \geq 4 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\rho(4R+\rho)} \cdot \sqrt{\alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha'}$$

Ισχύει

$$4R + \rho \geq \sqrt{3}\tau$$

(αυτή είναι στην πραγματικότητα η ανισότητα Finsler-Hadwiger)[27] και βέβαια

$$\alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha' \geq 4\sqrt{3}\mathrm{E}'$$

που είναι κάπως ισχυρότερη από την ανισότητα Weitzenböck.[28] Επομένως

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' \geq 2\sqrt{\rho\sqrt{3}\tau} \cdot \sqrt{4\sqrt{3}\mathrm{E}'} = 4\sqrt{3\mathrm{EE}'}$$

Αυτή η ανισότητα του Τσίντσιφα είναι σαφώς πιο ενδιαφέρουσα από όλες τις άλλες, γιατί εμπλέκει δύο τρίγωνα και ως εκ τούτου μπορεί να παράξει πληθώρα μη συμμετρικών ανισοτήτων. Π.χ. για

$$\alpha' = \mu_\beta, \quad \beta' = \mu_\gamma, \quad \gamma' = \mu_\alpha$$

και χρήση του γνωστού αποτελέσματος ότι οι διάμεσοι σχηματίζουν τρίγωνο με εμβαδόν ίσο με $\frac{3}{4}\mathrm{E}$, έχουμε[29]

$$\alpha\mu_\beta + \beta\mu_\gamma + \gamma\mu_\alpha \geq 6\mathrm{E} \tag{6.10}$$

Ενδιαφέρουσα γενίκευση της ανισότητας Weitzenböck αποτελεί επίσης η ανισότητα Neuberg-Pedoe ([26], σ.355):

[25] Δημοσιεύτηκε το 1965 στο [29] από τον Alexander Oppenheim (1903-1997), καθηγητή Μαθηματικών στο πανεπιστήμιο της Malaya. Ο Oppenheim δεν παραθέτει απόδειξη της (6.7) αλλά προτείνει ως μια «ενδιαφέρουσα άσκηση» να διαπιστωθεί πόσες ανισότητες του τριγώνου παράγονται από αυτήν. Η προηγούμενη απόδειξη της ανισότητας Oppenheim με χρήση των ανισοτήτων αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου και Cauchy-Schwarz παρατίθεται στο [30].

[26] Δημοσιεύτηκε το 1986 στο [31] από τον Γεώργιο Τσίντσιφα, καθηγητή Μαθηματικών στο Σύγχρονο Φροντιστήριο της Θεσσαλονίκης.

[27] Αυτό αποδεικνύεται αν μετασχηματίσουμε την ανισότητα Finsler-Hadwiger και αξιοποιήσουμε τη γνωστή ταυτότητα

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \tau^2 + \rho^2 + 4R\rho.$$

Για μια απόδειξη της τελευταίας βλ. [28], σσ.70-71.

[28] Αυτή μπορεί να αποδειχθεί με χρήση της ταυτότητας

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2\mathrm{E}\left(\frac{1}{\eta\mu\mathrm{A}} + \frac{1}{\eta\mu\mathrm{B}} + \frac{1}{\eta\mu\Gamma}\right),$$

της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου και της γνωστής ανισότητας

$$\eta\mu\mathrm{A}\eta\mu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

[29] Αυτή μπορεί να αποδειχθεί πιο εύκολα ως εξής: Από τη γνωστή ιδιότητα

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma \Rightarrow \mu_\alpha \leq \mu_\beta \leq \mu_\gamma$$

και την ανισότητα της αναδιάταξης προκύπτει ότι

$$\alpha\mu_\beta + \beta\mu_\gamma + \gamma\mu_\alpha \geq$$

$$\alpha\mu_\alpha + \beta\mu_\beta + \gamma\mu_\gamma \geq$$

$$\alpha\upsilon_\alpha + \beta\upsilon_\beta + \gamma\upsilon_\gamma = 6\mathrm{E}$$

.

Αν ΑΒΓ, ΧΥΖ τρίγωνα με εμβαδά $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$, ισχύει

$$\boxed{\begin{array}{c}\alpha^2\left(y^2+z^2-x^2\right)+\beta^2\left(z^2+x^2-y^2\right)+\\ \gamma^2\left(x^2+y^2-z^2\right)\geq 16\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2\end{array}} \tag{6.11}$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΧΥΖ είναι όμοια, ενώ όταν το ένα από τα δύο τρίγωνα είναι ισόπλευρο προκύπτει η ανισότητα Weitzenböck. Μια σύντομη απόδειξη της (6.11) προκύπτει αν τη μετασχηματίσουμε στην ισοδύναμη μορφή

$$\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq$$

$$16\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2+2\alpha^2x^2+2\beta^2y^2+2\gamma^2z^2.$$

Αυτή όμως ισχύει επειδή από την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τις τετράδες

$$\begin{pmatrix} 4\mathrm{E}_1 & \sqrt{2}\alpha^2 & \sqrt{2}\beta^2 & \sqrt{2}\gamma^2 \\ 4\mathrm{E}_2 & \sqrt{2}x^2 & \sqrt{2}y^2 & \sqrt{2}z^2 \end{pmatrix}$$

και τη μορφή (3.10) του τύπου του Ήρωνα προκύπτει ότι είναι

$$\left(16\mathrm{E}_1\mathrm{E}_2+2\alpha^2x^2+2\beta^2y^2+2\gamma^2z^2\right)^2\leq$$

$$\left(16{\mathrm{E}_1}^2+2\alpha^4+2\beta^4+2\gamma^4\right)\left(16{\mathrm{E}_2}^2+2x^4+2y^4+2z^4\right)=$$

$$\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^2$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι η (6.11), που γράφεται επίσης

$$x^2\left(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2\right)+y^2\left(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2\right)+z^2\left(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2\right)\geq 16E_1E_2,$$

λαμβάνει και τη μορφή[30]

$$x^2\sigma\varphi\mathrm{A}+y^2\sigma\varphi\mathrm{B}+z^2\sigma\varphi\Gamma\geq 4\mathrm{E}' \tag{6.12}$$

όπου E' το εμβαδόν του τριγώνου με πλευρές x, y, z. Η (6.12), που μπορεί να θεωρηθεί ως μία «διασταύρωση» των ανισοτήτων Weitzenböck

$$x^2+y^2+z^2\geq 4\sqrt{3}\mathrm{E}'$$

και Κριτικού-Βαρόπουλου

$$\sigma\varphi\mathrm{A}+\sigma\varphi\mathrm{B}+\sigma\varphi\Gamma\geq\sqrt{3},$$

επαναφέρει στο προσκήνιο τις αρχαίες γεωμετρικές προτάσεις που υπήρξαν «πρόγονοι» των γεωμετρικών ανισοτήτων και θέτει ένα ενδιαφέρον ερώτημα: Ποια θα μπορούσε να είναι η γεωμετρική ερμηνεία αυτής της ανισότητας·

Ευχαριστιες

Οι συγγραφείς ευχαριστούν τους δύο κριτές της εργασίας για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους.

Βιβλιογραφικές παραπομπές

1 Σ. Νεγρεπόντης & Β. Φαρμάκη: *Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών. Τόμος Ι.* Εκκρεμές, Αθήνα, 2019.

2 Ε. Σταμάτης: *Ευκλείδου Γεωμετρία. Στοιχεία. Τόμος Ι.* Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Εν Αθήναις, 1975.

3 C. M. Taisbak: *ΔΕΔΟΜΕΝΑ. Euclid's Data or The Importance of Being Given. Μυσευμ Τυσςυλανυμ Πρεσς, δπενηαγεν, 2003.*

4 H. Schöne: *Herons von Alexandria. Vermessungslehre und Dioptra.* B.G. Teubner, Leipzig, 1903. Nachdruck: B.G. Teubner, Stuttgart, 1976.

5 Γ. Θωμαΐδης: *Ανάδυση και εξέλιξη των λογαριθμικών εννοιών.* Ζητήματα Ιστορίας των Μαθηματικών 4. Όμιλος για την Ιστορία των Μαθηματικών, Θεσσαλονίκη, 1987.

6 A. von Braunmühl: *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. Erster Teil.* Teubner, Leipzig, 1900. Nachdruck: B.G. Teubner, Stuttgart, 1971.

7 Γ. Θωμαΐδης: *Ο μαθηματικός Ήρων από την Αλεξάνδρεια διδάσκει την απόδειξη και χρήση μιας νέας μεθόδου υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου.* Ευκλείδης Β′ 35, σσ.5–9. (Ιανουάριος-Φεβρουάριος-Μάρτιος 2000).
(Στην ενότητα 4 της εργασίας, σειρά 2, η λέξη «πρόβλημα» να διορθωθεί σε «πλεονέκτημα»)

8 Ι. Πανάκης: *Μαθηματικά Ε′ Γυμνασίου Θετικής Κατευθύνσεως (Τριγωνομετρία).* Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι, 1972.

9 Ε. Παπατριανταφύλλου: *Μαθηματικά ΣΤ′ Γυμνασίου Θετικής Κατευθύνσεως (Τριγωνομετρία).* Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι, 1971.

10 R. Weitzenböck: *Über eine Ungleichung in der Dreiecksgeometrie.* Mathematische Zeitschrift 5 (1–2), σσ.137–146 (1919).

11 Δ. Κοντογιάννης: Μαθηματικές Ολυμπιάδες. Αθήνα, 1981.

12 A. Engel: *Problem-Solving Strategies.* Berlin, Springer, 1998.

13 Ν. Κριτικός: *Μία ελαχιστική ιδιότητα των γωνιών ενός τριγώνου της Ευκλειδείου Γεωμετρίας.* Δελτίον Συνδέσμου Μαθηματικών Δημοσίας Μέσης Παιδείας 2, σσ.15–18 (Δεκέμβριος 1933).

[30] Παρεμπιπτόντως η (6.12) αποδεικνύεται και με την ανισότητα Oppenheim αμέσως.

14 Θ. Βαρόπουλος: *Περί μιας ελαχιστικής ιδιότητος των γωνιών ενός τριγώνου του κ. Ν. Κριτικού.* Δελτίον της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Τόμος ΙΕ′, τεύχος Α′, σ.17 (1934).

15 O. Bottema, R. Djordjević, R. Vasić, D. Mitrinović & P. Vasić: *Geometric Inequalities.* Wolters – Noordhoff, Groningen, 1969.

16 Δ. Κοντογιάννης: *Ισότητες και Ανισότητες στο Τρίγωνο.* Εκπαιδευτική Πράξη, Αθήνα, 1996.

17 Γ. Κίζας: *Μία αρχή περί των μεγίστων και ελαχίστων.* Παράρτημα του Δελτίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας 29, σσ.449–451 (Οκτώβριος 1934).

18 Σ. Χαλέβας: *Περί μιας ιδιότητος των γωνιών του τριγώνου.* Παράρτημα του Δελτίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας 29, σ.451 (Οκτώβριος 1934).

19 Γ. Ξηρουδάκης: *Μερικαί ιδιότητες των γωνιών τριγώνου.* Παράρτημα του Δελτίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας 29, σσ.452–453 (Οκτώβριος 1934).

20 N. Kritikos: *Sur quelques inegalités ayant lieu entre trois quantités liées par la relation $x + y + z = xyz$ et quelques applications au triangle.* Actes du Congrès Interbalcanique de Mathématiciens, σσ.157–158 (Athènes, 2-9 Septembre 1934). Imprimerie National, 1935.

21 Ι. Πανάκης: *Τριγωνομετρία. Τόμοι 1, 2 & 3.* Αθήναι, 1973.

22 Μ. Μαραγκάκης: *Τριγωνομετρικά Θέματα.* Αθήνα, 1979.

23 C. Alsina & R. Nelsen: *When Less is More. Visualizing Basic Inequalities.* The Mathematical Association of America, 2009.

24 Α. Πάλλας: Μεγάλη Τριγωνομετρία. Έκδοσις 2α. Εκδοτικός Οίκος Παπαδημητροπούλου, Αθήναι, 1962.

25 P. Finsler & H. Hadwiger: *Einige Relationen im Dreieck.* Commentarii Mathematici Helvetici 10 (1) σσ.316–326 (1937).

26 D. Mitrinović, J. Pečarić & V. Volenec: *Recent Advances in Geometric Inequalities.* Kluwer, Dordrecht, 1989.

27 T.R. Curry: *Problem E1861.* The American Mathematical Monthly 73(2), σ.199 (1966).

28 R.B. Manfrino, J.A.G. Ortega & R.V. Delgado: *Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach.* Birkäuser, Basel, 2009.

29 A. Oppenheim: *Problem E1724.* The American Mathematical Monthly 72(7), σσ.792–793 (1965).

30 M. Chirita: *The inequality of A. Oppenheim.* Mathematical Excalibur 17(5), σσ.1–2 & 4 (2013).

31 G. Tsintsifas: *Problem E3150.* The American Mathematical Monthly 93(5), σ.400 (1986).