

*Modus ponens, modus tollens, reductio ad
absurdum και Steiner-Lehmus*

*Μελέτη μερικών κλασικών αποδείξεων μιας διάσημης
γεωμετρικής πρότασης*

Γιάννης Θωμαΐδης
Δρ. Μαθηματικών
τ. Σχολικός Σύμβουλος

Περίληψη

Στην εργασία αυτή εξετάζουμε, χρησιμοποιώντας πρωτογενείς πηγές, 10 γεωμετρικές αποδείξεις του θεωρήματος Steiner-Lehmus που δημοσιεύτηκαν την περίοδο 1844-1970. Αναδεικνύουμε και συγκρίνουμε τις θεμελιώδεις ιδέες στις οποίες στηρίζονται και σχολιάζουμε από μια νέα οπτική γωνία το ζήτημα του άμεσου ή έμμεσου χαρακτήρα τους, το οποίο έχει μονοπωλήσει αρκετές φορές τη συζήτηση για την περίφημη αυτή γεωμετρική πρόταση.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	2
1 Έμμεσες αποδείξεις του θεωρήματος Steiner-Lehmus	2
1.1 Μέθοδος του Steiner	2
1.2 Μέθοδος του Descube	3
1.3 Μέθοδος του Smith	3
1.4 Μέθοδος του Lehmus	4
1.5 Μέθοδος του Miller (πρώτη παραλλαγή της ιδέας του Lehmus)	5
1.6 Μέθοδος του Casey (δεύτερη παραλλαγή της ιδέας του Lehmus)	5
1.7 Μια ανασκόπηση των έμμεσων αποδείξεων του θεωρήματος Steiner-Lehmus	6
2 Ο γεωμέτρης H.S.M. Coxeter και το θεώρημα Steiner-Lehmus	6
3 Άμεσες αποδείξεις του θεωρήματος Steiner-Lehmus	9
3.1 Μέθοδος του Hesse	9
3.2 Μέθοδος του Henderson	10
3.3 Μέθοδος των Williams & Savage	10
3.4 Μέθοδος του Malečević	11
3.5 Η «μετρική» μέθοδος	12
3.6 Μια ανασκόπηση των άμεσων αποδείξεων του θεωρήματος -Steiner-Lehmus και μερικά συμπεράσματα	12
Βιβλιογραφία	13

Εισαγωγή

Η ανεξάντλητη δεξαμενή των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μας παρέχει πολλά παραδείγματα που είναι αποκαλυπτικά για την ιδιαιτερότητα, τις δυσκολίες αλλά και τα αξιοπερίεργα της αποδεικτικής διαδικασίας στα Μαθηματικά. Ένα κλασικό παράδειγμα αποτελεί η ακόλουθη πρόταση η οποία, παρά το στοιχειώδες περιεχόμενο και την απλούστατη διατύπωση, φέρει το μεγαλοπρεπή τίτλο «θεώρημα των Steiner και Lehmus»:

Αν δύο εσωτερικές διχοτόμοι ενός τριγώνου είναι ίσες, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Ενώ η αντίστροφη πρόταση (όπως και οι αντίστοιχες για τα ύψη ή τις διαμέσους ενός τριγώνου), περιλαμβάνονται στις απλές ασκήσεις κάθε βιβλίου Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus παρουσιάζει μια απροσδόκητη δυσκολία που έχει προβληματίσει και απασχολήσει τα τελευταία 180 χρόνια πολυάριθμους μαθηματικούς (μερικοί των οποίων είναι ερευνητές πρώτης κλάσεως), ακόμη και νομπελίστες φυσικούς!

Η ιστορία της αρχίζει το 1840, όταν ο Γερμανός καθηγητής Daniel Christian Ludolph Lehmus (1780-1863) «προκάλεσε» σημαντικούς μαθηματικούς της εποχής του ζητώντας να επινοήσουν μια καθαρά γεωμετρική απόδειξη. Ένας από τους πρώτους που ανταποκρίθηκαν ήταν ο περίφημος Ελβετός γεωμέτρης Jakob Steiner (1796-1863), που επινόησε και έστειλε αμέσως στον Lehmus μια απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο. Η «πρόκληση» του Lehmus προκάλεσε μεγάλο ενδιαφέρον και πολλές συζητήσεις, σε βαθμό που ο Steiner αποφάσισε να δημοσιεύσει την απόδειξή του το 1844 στο περιοδικό *Journal für die reine und angewandte Mathematik* μαζί με μια μελέτη για την περίπτωση των εξωτερικών διχοτόμων (όπου το συμπέρασμα δεν ισχύει πάντοτε). Από τότε και μέχρι σήμερα το θεώρημα Steiner-Lehmus έχει γίνει αντικείμενο συνεχούς μελέτης, ενώ μια πρόσφατη έρευνα κατέγραψε περισσότερες από 80 αποδείξεις (φυσικά, όχι μόνο γεωμετρικές) που είναι δημοσιευμένες σε διάφορα μαθηματικά περιοδικά και γλώσσες.

Κατά περιόδους προκλήθηκαν εκτεταμένες συζητήσεις για τον άμεσο ή έμμεσο χαρακτήρα των αποδείξεων που έχουν δοθεί, ενώ σπουδαίοι μαθηματικοί όπως ο James Joseph Sylvester (1814-1897) και πιο πρόσφατα ο John Conway (1937-2020)¹, έχουν επιχειρήσει να ερμηνεύσουν τα βαθύτερα αίτια της δυσκολίας. Την οδυνηρή εμπειρία του αδιεξόδου που προκαλεί αυτή η δυσκολία έχουν βιώσει πολλοί σημαντικοί επιστήμονες κατά το παρελθόν, όπως αφήνει να εννοηθεί το ακόλουθο σχόλιο του J. J. Sylvester στο οποίο υπονοούνται προσωπικότητες όπως ο μαθηματι-

κός Isaac Todhunter (1820-1884) και ο αστρονόμος John Couch Adams (1819-1892)²

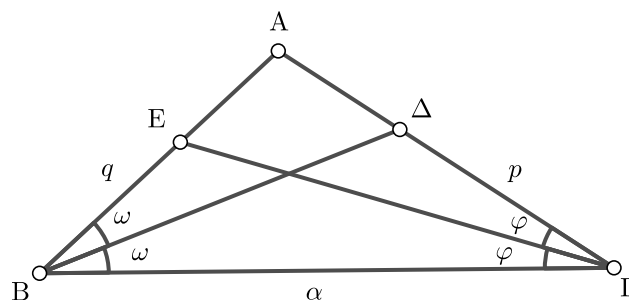
Αν πιστέψουμε όσα αναφέρονται, διάνοιες ικανές να επεκτείνουν τα όρια του πλανητικού συστήματος, και να φωτίσουν νέες περιοχές του σύμπαντος με τον πυρσό της ανάλυσης, βρέθηκαν σε αμηχανία από τις δυσκολίες του στοιχειώδους προβλήματος που εξετάζουμε. ([1], σελ.369 υποσημείωση).

Στην εργασία αυτή επιχειρούμε μια συγκριτική μελέτη ορισμένων κλασικών γεωμετρικών αποδείξεων του θεωρήματος Steiner-Lehmus, με στόχο να αναδείξουμε την εννοιολογική εξέλιξη των μεθοδολογικών και θεωρητικών εργαλείων που χρησιμοποιούν. Για να διευκρινίσουμε ορισμένα ζητήματα που αφορούν την αποδεικτική μέθοδο, διαχωρίσαμε τις αποδείξεις σε άμεσες (αυτές που στη μαθηματική λογική χαρακτηρίζονται με τον όρο *modus ponens*) και έμμεσες (*reductio ad absurdum* και *modus tollens*).

1 Έμμεσες αποδείξεις του θεωρήματος Steiner-Lehmus

1.1 Μέθοδος του Steiner

Η απόδειξη του Steiner που δημοσιεύτηκε στο [2] το 1844, στηρίζεται σε ένα γεωμετρικό μετασχηματισμό του αρχικού τριγώνου.



Σχήμα 1

Με δεδομένο ότι στο τρίγωνο $AB\Gamma$ οι εσωτερικές διχοτόμοι $B\Delta = z$ και $\Gamma E = w$ είναι ίσες, ο Steiner υποθέτει ότι το $AB\Gamma$ δεν είναι ισοσκελές και ειδικότερα ότι $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε από τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$, τα οποία έχουν δύο ζεύγη ίσων πλευρών και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες ($\omega > \varphi$), προκύπτει ότι είναι $\Gamma\Delta > BE$ δηλαδή $p > q$. Επίσης, από την ιδιότητα της εξωτερικής γωνίας τριγώνου, ισχύει

$$B\hat{\Delta}\Gamma = \hat{A} + \omega > \hat{A} + \varphi = \Gamma\hat{E}B.$$

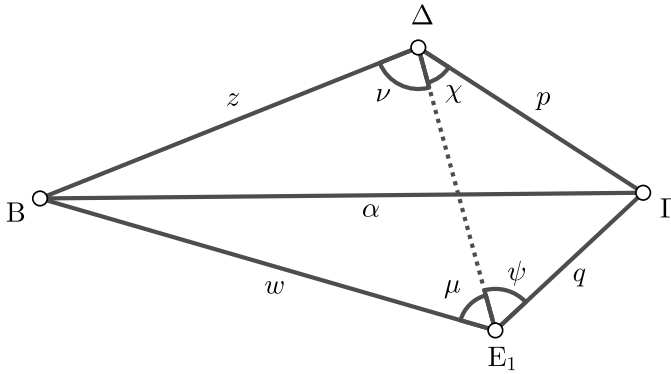
Αυτά τα τρίγωνα, συνεχίζει ο Steiner, τα φανταζόμαστε (για λόγους ευκολίας) ότι έχουν μεταφερθεί προς

¹ Οι ιδέες του Conway, που στηρίζονται σε μια αλγεβροποίηση του θεωρήματος Steiner-Lehmus με τους τύπους που παρέχουν το μήκος κάθε διχοτόμου συναρτήσει των πλευρών του τριγώνου, είναι διαθέσιμες στη διαδικτυακή διεύθυνση:

<https://cs.nyu.edu/pipermail/fom/2004-August/008394.html>

² Ο Sylvester διατυπώνει αυτό το σχόλιο στην εργασία του για το θεώρημα Steiner-Lehmus που παρουσιάζουμε στην ενότητα 1.3

στιγμή σε τέτοια θέση (σχήμα 2) ώστε οι αντίστοιχες πλευρές τους να βρίσκονται εκατέρωθεν της βάσης $\alpha = B\Gamma$ και όλα τα τμήματα να είναι ίσα με εκείνα που συμβολίζονται στο Σχήμα 1 με τα ίδια γράμματα.



Σχήμα 2

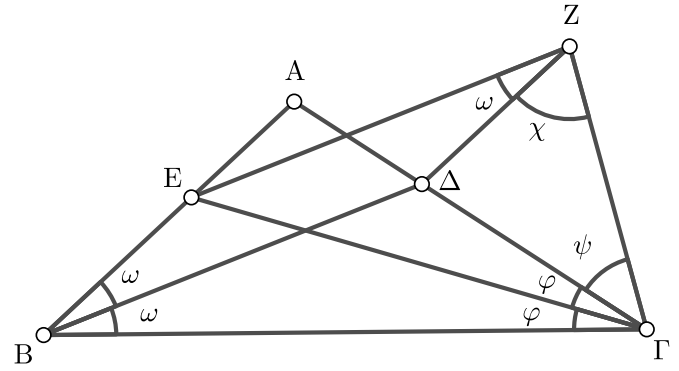
Επειδή είναι $z = w$ (δηλαδή τα $B\Delta = \Gamma E$ στο σχήμα 1), αν φέρουμε το ΔE_1 θα είναι οι γωνίες $\nu = \mu$, και επειδή $\hat{\Delta} > \hat{E}_1$ (δηλαδή οι $B\hat{\Delta}\Gamma > \Gamma\hat{E}B$ στο σχήμα 1) προκύπτει ότι για τις γωνίες χ και ψ ισχύει $\chi > \psi$. Άρα πρέπει να είναι $q > p$ το οποίο αντιφάσκει με το προηγούμενο $p > q$. Κατά συνέπεια οι γωνίες ω και φ δεν μπορεί να είναι άνισες και το τρίγωνο $AB\Gamma$ θα είναι ισοσκελές.

ΣΧΟΛΙΟ. Στην προηγούμενη απόδειξη ο Steiner χρησιμοποιεί ουσιαστικά το συμμετρικό του τριγώνου $EB\Gamma$ ως προς το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται ένα ισοσκελές τρίγωνο με σχέλη τις ίσες διχοτόμους του αρχικού τριγώνου.

1.2 Μέθοδος του Descube

Η απόδειξη του Γάλλου μηχανικού Descube που δημοσιεύτηκε στο [3] το 1880 χρησιμοποιεί την κεντρική ιδέα της απόδειξης του Steiner, δηλαδή τη δημιουργία ενός ισοσκελούς τριγώνου με πλευρές τις ίσες διχοτόμους του δοθέντος τριγώνου. Αυτή η απόδειξη όμως έχει το πλεονέκτημα ότι παρακάμπτει την ανάγκη μετατόπισης του ενός από τα δύο τρίγωνα που σχηματίζουν οι ίσες διχοτόμοι με τη βάση του τριγώνου.

³ Η απόδειξη του Descube είναι η πλέον συνήθης απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus που συναντάται στην κλασική Ελληνική βιβλιογραφία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η απόδειξη αυτή έγινε κυρίως γνωστή όταν κυκλοφόρησε η ελληνική μετάφραση της Γεωμετρίας των Ιησουϊτών το 1952 (βλ. [4], σελ. 248), αλλά η παρουσίασή της σε πολλά βιβλία είναι δυσανάλογα μακροσκελής σε σχέση με τη λιτότητα της απόδειξης που δημοσίευσε ο Descube το 1880. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι διάφορες αποδείξεις του θεωρήματος δημοσιεύτηκαν τις δεκαετίες του 1930, 1940 και 1950 στο Παράρτημα του Δελτίου της Ε.Μ.Ε. (τον πρόδρομο του σημερινού Ευκλείδη), ενώ το 1953 ο Ι. Πανάκης δημοσίευσε 12 αποδείξεις στο [5], σελ. 61-72.



Σχήμα 3

Ο Descube υποθέτει ομοίως ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ δεν είναι ισοσκελές και ότι $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ (δηλαδή $\omega > \varphi$), οπότε θα ισχύει όπως και πριν $\Gamma\Delta > BE$. Στη συνέχεια φέρει το τμήμα EZ , παράλληλο και ίσο προς τη διχοτόμο $B\Delta$ δημιουργώντας έτσι το παραλληλόγραμμο $BEZ\Delta$ και το ισοσκελές τρίγωνο $E\Gamma Z$ με $E\Gamma = EZ$. Άρα είναι $E\hat{Z}\Gamma = E\hat{\Gamma}Z$, δηλαδή

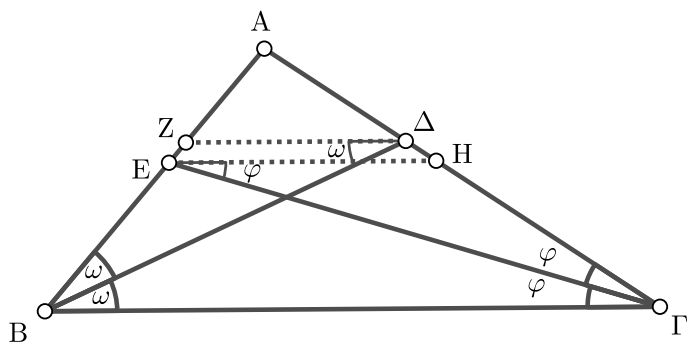
$$\omega + \chi = \varphi + \psi.$$

Επειδή όμως $\omega > \varphi$ προκύπτει από την τελευταία ότι $\chi < \psi$ και άρα στο τρίγωνο $\Delta Z\Gamma$ θα είναι $\Gamma\Delta < \Delta Z$, δηλαδή $\Gamma\Delta < BE$, που είναι άτοπο.³

ΣΧΟΛΙΟ. Ουσιαστικά ο Descube αντικαθιστά την μετατόπιση (κεντρική συμμετρία) του τριγώνου $B\Gamma E$ της απόδειξης του Steiner με μια παράλληλη μεταφορά της διχοτόμου $B\Delta$. Δηλαδή η βασική διαφορά μεταξύ των δύο αποδείξεων βρίσκεται στο είδος του γεωμετρικού μετασχηματισμού που χρησιμοποιούν για να υλοποιήσουν την κεντρική ιδέα (την κατασκευή του ισοσκελούς τριγώνου με σχέλη τις ίσες διχοτόμους του αρχικού τριγώνου).

1.3 Μέθοδος του Smith

Ο σπουδαίος Άγγλος μαθηματικός J.J. Sylvester (1814-1897) δημοσίευσε το 1852 στο [1] μια γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus που είχε λάβει από τον μαθηματικό B.L. Smith του Κολλεγίου Jesus του Cambridge. Ο Sylvester, που χρησιμοποιεί το θεώρημα για να διατυπώσει μερικές γενικότερες σχέψεις για τη μέθοδο απόδειξης με απαγωγή σε άτοπο, χαρακτηρίζει τη συγκεκριμένη απόδειξη ως την απλούστερη όλων και την παρουσιάζει με τον εξής τρόπο (η έμφαση δική μας):



Σχήμα 4

Με δεδομένο ότι $BD = GE$, ας υποθεθεί ότι είναι $\hat{B} > \hat{G}$, δηλαδή $\hat{\Delta BG} > \hat{EGB}$. Τότε μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι το σημείο Δ βρίσκεται ψηλότερα ως προς τη BG σε σχέση με το σημείο E : επομένως αν αχθούν οι παράλληλες ΔZ και EH προς τη BG , η ΔZ θα βρίσκεται πάνω από την EH . Τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι $\Delta Z = ZB$, $EH = HG$ και συνεπώς κάθε μία από τις ΔZ , ZB είναι αντίστοιχα μικρότερη από τις EH , HG . Επίσης η γωνία $\hat{\Delta ZB}$ που είναι παραπληρωματική της $\hat{B}$ θα είναι μικρότερη από τη γωνία $\hat{EHG}$ που είναι παραπληρωματική της $\hat{G}$. Από αυτά, συνεχίζει ο Sylvester, αμέσως συνάγεται σύμφωνα με ένα εύκολο πόρισμα μιας πρότασης του Ευκλείδη ότι η BD θα είναι μικρότερη από τη GE , ενώ από υπόθεση είναι ίση με αυτήν. Έτσι καμιά από τις γωνίες της βάσης δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την άλλη και το τρίγωνο αποδεικνύεται ισοσκελές.

ΣΧΟΛΙΟ. Όπως είναι φανερό, στην παραπάνω απόδειξη ο Sylvester κάνει κατάχρηση της φράσης «ευκόλως αποδεικνύεται», αν με αυτήν δεν υπονοεί απλώς τη διαισθητική προφάνεια που συνάγεται από την εποπτεία του σχήματος. Τα επόμενα είναι τρία σημεία που θα μπορούσαν να αποδειχθούν με μεγαλύτερη αυστηρότητα, ως λήμματα:

1) «το σημείο Δ βρίσκεται ψηλότερα ως προς τη BG σε σχέση με το σημείο E »:

Πρέπει να αποδειχθεί ότι η απόσταση του Δ από τη BG είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη απόσταση του E . Η απόδειξη αυτή ανάγεται ουσιαστικά στη σύγκριση των υψών του τριγώνου AED που άγονται από τις κορυφές E και Δ (πρόκειται για μία ενδιαφέρουσα και όχι απλή άσκηση στις ανισοτικές σχέσεις). Πιο κοντά ίσως στο «ευκόλως αποδεικνύεται» του Sylvester βρίσκεται το ακόλουθο επιχείρημα: Επειδή το $Z\Delta$ βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου AEH , η απόσταση του A από το $Z\Delta$ είναι μικρότερη της απόστασης του A από την EH . Αν συγκρίνουμε τις διαφορές αυτών των αποστάσεων από την απόσταση του A από τη BG έχουμε προφανώς το ζητούμενο.

2) «κάθε μία από τις ΔZ , ZB είναι αντίστοιχα μικρότερη από τις EH , HG »:

Πρέπει να αποδειχθεί ότι η παράλληλη ΔZ είναι μικρότερη από την EH , κάτι που μπορεί να γίνει τυπικά με χρήση του θεωρήματος της εσωτερικής διχοτόμου στις BD , GE

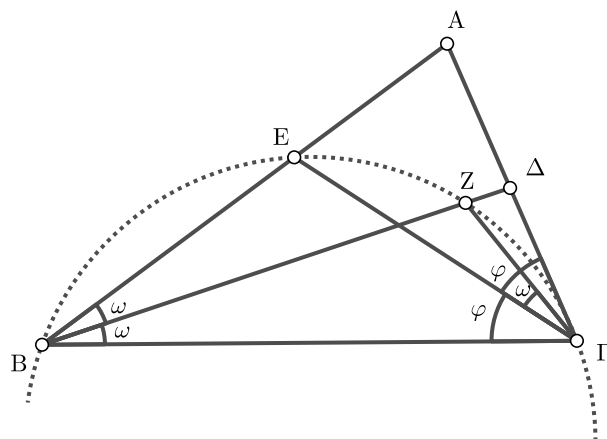
και εν συνεχεία του θεωρήματος Θαλή (βλ. π.χ. στο [5], σελ. 72). Ίσως όμως βρίσκεται πλησιέστερα στο πνεύμα της προσέγγισης του Sylvester μια απόδειξη χωρίς χρήση αναλογιών (το $E\Delta$ βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου AEH και επομένως η από το Δ παράλληλη στην AB θα τμήσει το EH σε εσωτερικό σημείο του).

3) «συνάγεται σύμφωνα με ένα εύκολο πόρισμα μιας πρότασης του Ευκλείδη ότι η BD θα είναι μικρότερη από τη GE ».

Δεν είναι σαφές ποια πρόταση του Ευκλείδη υπονοεί εδώ ο Sylvester. Αυτό που συμπεραίνει είναι ότι αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν άνισα σκέλη και ομοίως άνισες γωνίες της κορυφής, τότε θα έχουν και ομοίως άνισες βάσεις. Η πρόταση αυτή θα μπορούσε να αποδειχθεί τοποθετώντας τα δύο ισοσκελή τρίγωνα $Z\Delta B$ ($Z\Delta = ZB$) και HEG ($HE = HG$) με $Z\Delta < HE$, $ZB < HG$ και $\hat{\Delta ZB} < \hat{EHG}$, έτσι ώστε οι βάσεις BD και GE να ανήκουν στην ίδια ευθεία και να έχουν κοινό μέσο (οπότε οι κορυφές Z και H θα ανήκουν στην κοινή μεσοκάθετη των δύο βάσεων). Με απαγωγή σε άτοπο αποκλείονται τότε οι περιπτώσεις $BD = GE$, $BD > GE$ και συνάγεται ότι $BD < GE$.

1.4 Μέθοδος του Lehmus

Το 1850 ο Th. Lange δημοσίευσε στο [6] την ακόλουθη απόδειξη που είχε λάβει από τον D. C. L. Lehmus:



Σχήμα 5

Με δεδομένο ότι $BD = GE$, ας υποθεθεί ότι είναι $\hat{B} < \hat{G}$, δηλαδή $\omega < \phi$. Υπάρχει τότε στο εσωτερικό της γωνίας $\hat{E\Gamma A} = \phi$ σημείο Z τέτοιο ώστε $\hat{E\Gamma Z} = \hat{E\Gamma B} = \omega$. Άρα τα σημεία E , B , Γ , Z είναι ομοκυκλικά. Επίσης είναι $\hat{\Gamma B E} = \omega + \omega < \phi + \omega = \hat{B\Gamma Z}$ και $\hat{B\Gamma Z} = \phi + \omega < 90^\circ$.

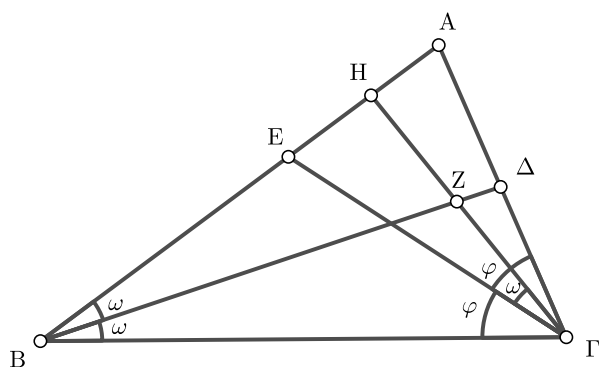
Από τα παραπάνω έπεται ότι $\hat{\Gamma E} < \hat{BZ} < 180^\circ$ και επειδή σε άνισα τόξα κύκλου μικρότερα ημικυκλίου αντιστοιχούν ομοίως άνισες χορδές, συμπεραίνουμε ότι $GE < BZ$ και πολύ περισσότερο $GE < BD$, που αντιφάσκει με την υπόθεση.

ΣΧΟΛΙΟ. Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι με τις μεθόδους των Smith και Lehmus αποδεικνύεται ουσιαστικά μια

γενικότερη πρόταση από το θεώρημα Steiner-Lehmus: Αν δύο γωνίες ενός τριγώνου είναι άνισες, τότε οι αντίστοιχες εσωτερικές διχοτόμοι είναι άνισες και στη μικρότερη γωνία αντιστοιχεί η μεγαλύτερη διχοτόμος.⁴ Η κεντρική ιδέα της απόδειξης του Lehmus είναι η κατασκευή μιας γωνίας, ίσης προς το μισό της μικρότερης από τις δύο γωνίες της βάσης του τριγώνου, στο εσωτερικό του μισού της μεγαλύτερης. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η απόδειξη αυτή είχε μια πολύ ενδιαφέρουσα εξέλιξη. Η ίδια κεντρική ιδέα χρησιμοποιήθηκε σε ορισμένες παραλλαγές της απόδειξης στις οποίες δεν χρησιμοποιούνται ιδιότητες του κύκλου, γεγονός που ίσως συνέβαλε να περιέλθει η απόδειξη του Lehmus σε αφάνεια. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να δημοσιευτεί στις αρχές της δεκαετίας του 1960 στο περιοδικό American Mathematical Monthly η απόδειξη του Lehmus ως νέα ανακάλυψη δύο Άγγλων μηχανικών, και μάλιστα να χαρακτηριστεί από τους εκδότες του περιοδικού ως η απλούστερη απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus.⁵

1.5 Μέθοδος του Miller (πρώτη παραλλαγή της ιδέας του Lehmus)

Ο J. S. Mackay δημοσίευσε το 1901 στο [7] μια σύντομη ιστορική ανασκόπηση των αποδείξεων που είχαν δοθεί για το θεώρημα Steiner-Lehmus, στην οποία συμπεριέλαβε και την ακόλουθη απόδειξη που είχε λάβει, όπως σημειώνει, το 1866 από τον A. Miller:



Σχήμα 6

Όπως και στη μέθοδο Lehmus, με υπόθεση ότι $\omega < \varphi$, κατασκευάζεται στο εσωτερικό της γωνίας $\widehat{ΕΓΑ} = \varphi$ μια γωνία $\widehat{ΕΓΗ} = \omega$ και ονομάζεται Ζ το σημείο στο οποίο η ΓΗ τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ. Επειδή $\omega + \varphi > \omega + \omega$, από το τρίγωνο ΗΒΓ προκύπτει ότι είναι $BH > GH$. Επίσης, από την ομοιότητα των τριγώνων ΒΗΖ και ΓΕΗ, προκύπτει ότι

$$\frac{BH}{GH} = \frac{BZ}{GE}.$$

Επειδή όμως $BH > GH$, έπεται από την τελευταία ότι είναι

⁴Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, η πρόταση αυτή (η οποία συνδέεται ουσιαστικά με την αντιθετοαντίστροφη πρόταση του θεωρήματος Steiner-Lehmus), εμφανίζεται από τη δεκαετία του 1940 ως ένα βασικό λήμμα στο οποίο ανάγονται πολλές έμμεσες αποδείξεις του θεωρήματος.

⁵ Το ζήτημα αυτό εξετάζεται λεπτομερώς στην ενότητα 3.

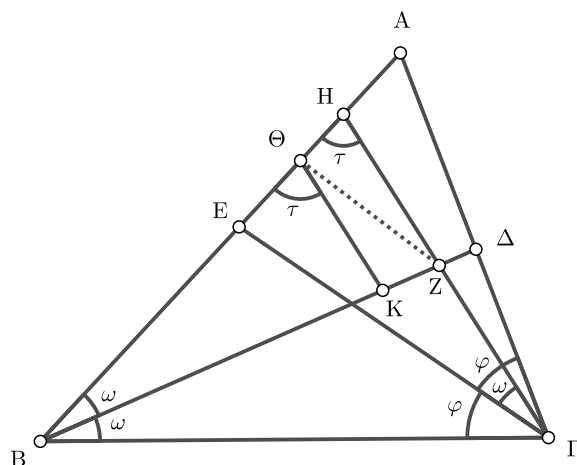
$BZ > GE$, άρα και $BD > GE$ το οποίο αντιφάσκει προς την υπόθεση ότι οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ είναι ίσες.

ΣΧΟΛΙΟ. Όπως βλέπουμε η κεντρική ιδέα της απόδειξης του Lehmus χρησιμοποιείται εδώ για τη δημιουργία δύο ομοίων τριγώνων, γεγονός που εισάγει στη μελέτη του προβλήματος το ισχυρό εργαλείο των αναλογιών. Ο W. E. Bleick δημοσίευσε το 1948 στο [8] μια διαφορετική ιδέα για τη δημιουργία δύο ομοίων τριγώνων στο εσωτερικό του ΑΒΓ (με κατασκευή των παραλλήλων από τα Δ και Ε προς τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα), από τα οποία προκύπτει με χρήση αναλογιών το ζητούμενο άτοπο. Ο Bleick σημειώνει ότι η έμμεση αυτή απόδειξη δόθηκε το 1932 από την Maria Goeppert Mayer (1906-1972), θεωρητική φυσικό η οποία τιμήθηκε το 1963 με το βραβείο Nobel.

1.6 Μέθοδος του Casey (δεύτερη παραλλαγή της ιδέας του Lehmus)

Ο J.A. McBride δημοσίευσε το 1943 στο [9] μια ιστορική ανασκόπηση της πρώτης εκατονταετηρίδας του θεωρήματος Steiner-Lehmus, στην οποία παραθέτει μεταξύ άλλων την ακόλουθη απόδειξη που αποδίδεται στον J. Casey και είχε δημοσιευτεί το 1933 στο περιοδικό Mathematical Gazette:

Με τις ίδιες ακριβώς υποθέσεις, όπως στις αποδείξεις των Lehmus και Miller, ο Casey κατασκευάζει ομοίως στο εσωτερικό της γωνίας $\widehat{ΕΓΑ} = \varphi$ τη γωνία $\widehat{ΕΓΗ} = \omega$, ονομάζει Ζ το σημείο στο οποίο η ΓΗ τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ και από το τρίγωνο ΗΒΓ συμπεραίνει ότι $BH > GH$ (επειδή $\omega + \varphi > \omega + \omega$).



Σχήμα 7

Άρα υπάρχει στο εσωτερικό του ΒΗ σημείο Θ τέτοιο ώστε $B\Theta = GH$. Με κορυφή το Θ κατασκευάζεται γωνία $\widehat{ΒΘΚ} = \widehat{ΒΗΓ}$ (το Κ σημείο της ΒΔ). Έτσι δημιουργείται το

τρίγωνο $B\Theta K$ ίσο προς το τρίγωνο $\Gamma H E$, από όπου συνάγεται ότι $BK = \Gamma E$ και κατά συνέπεια ισχύει $B\Delta > \Gamma E$, που αντιβαίνει στην υπόθεση.

Ο McBride θεωρεί ότι το τελευταίο βήμα χρήζει περαιτέρω αιτιολόγησης και συμπληρώνει την απόδειξη του Casey ως εξής: Φέρει το ΘZ και σημειώνει ότι επειδή $B\hat{\Theta}Z > B\hat{H}\Gamma$ (ως εξωτερική του τριγώνου $\Theta H Z$), θα είναι επίσης $B\hat{\Theta}Z > B\hat{\Theta}K$ άρα το K θα κείται μεταξύ των B και Z , επομένως και μεταξύ των B και Δ .

Από τα παραπάνω, γράφει ο McBride ολοκληρώνοντας την απόδειξη, συμπεραίνουμε ότι αν υποθεθεί $AB > \Gamma\Gamma$, τότε $B\Delta > \Gamma E$. Αυτή όμως είναι η αντιθετοαντίστροφη (contrapositive) της πρότασης «Αν $B\Delta = \Gamma E$, τότε $AB = \Gamma\Gamma$ ».

ΣΧΟΛΙΟ. Παρατηρούμε ότι οι τρεις προηγούμενες, έμμεσες αποδείξεις του θεωρήματος Steiner-Lehmus στηρίζονται στην ίδια κεντρική ιδέα: Με δεδομένη την ισότητα των δύο διχοτόμων, οι Lehmus, Miller και Casey υποθέτουν ότι οι γωνίες της βάσης είναι άνισες, κατασκευάζουν στο εσωτερικό της μεγαλύτερης μια γωνία ίση με το μισό της μικρότερης και καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η διχοτόμος της μικρότερης γωνίας είναι μεγαλύτερη από τη διχοτόμο της μεγαλύτερης γωνίας. Οδηγούνται όμως σε αυτό το άτοπο χρησιμοποιώντας διαφορετικά εννοιολογικά εργαλεία. Ο Lehmus αξιοποιεί ένα εγγράψιμο τετράπλευρο και την ανισοτική σχέση μεταξύ των τόξων και των χορδών του αντίστοιχου κύκλου, ο Miller χρησιμοποιεί δύο όμοια τρίγωνα και τη σχέση αναλογίας μεταξύ των πλευρών τους, ενώ ο Casey περιορίζεται στα λιτά μέσα του λεγόμενου «πρώτου βιβλίου» της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κατασκευάζοντας δύο ίσα τρίγωνα. Όλα τα προηγούμενα δείχνουν αρχικά ότι η χρήση βοηθητικών κατασκευών και σχημάτων αποτελεί μια αναπόφευκτη τεχνική για την απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus, ένα στοιχείο που δεν προδιαγράφεται βέβαια από την εξαιρετικά απλή διατύπωσή του. Από την άλλη μεριά, η δυνατότητα πολλαπλών προσεγγίσεων της ίδιας κεντρικής ιδέας είναι ενδεικτική για την ποικιλία και το στοιχειώδη χαρακτήρα των μεθόδων της παραδοσιακής Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

1.7 Μια ανασκόπηση των έμμεσων αποδείξεων του θεωρήματος Steiner-Lehmus

Με την αναφορά στην «αντιθετοαντίστροφη πρόταση» του θεωρήματος Steiner-Lehmus, ο McBride εισήγαγε στην εκατονταετή ιστορία του θεωρήματος κάποια στοιχεία της

νέας ακόμη τότε (αρχές της δεκαετίας του 1940) μαθηματικής λογικής. Στις εκτεταμένες συζητήσεις για το θεώρημα, που είχαν αρχίσει στη Βρετανία τη δεκαετία του 1850 (σε αυτές εντάσσεται και η εργασία του Sylvester το 1852, στην οποία δημοσιεύτηκε η απόδειξη του Smith), είχε κυριαρχήσει η άποψη ότι όλες οι αποδείξεις είναι «έμμεσες», με την έννοια ότι χρησιμοποιούν την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο είτε στηρίζονται σε προτάσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας που έχουν αποδειχθεί με αυτή τη μέθοδο.⁶

Η τοποθέτηση του ζητήματος στο πλαίσιο της μαθηματικής λογικής επιτρέπει να κάνουμε πιο σαφή και λειτουργική τη διάκριση ανάμεσα σε «άμεσες» και «έμμεσες» αποδείξεις μιας πρότασης της μορφής «αν p , τότε q ». Αρκεί να δεχθούμε ότι στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν εκείνες οι αποδείξεις που είναι γνωστές με τους λατινικούς όρους *modus tollens* και *reductio ad absurdum*:

Modus tollens: Από την άρνηση του συμπεράσματος q παράγεται η άρνηση της υπόθεσης p (δηλαδή αποδεικνύεται η αντιθετοαντίστροφη πρόταση που είναι ισοδύναμη της αρχικής).

Reductio ad absurdum: Από την υπόθεση p και την άρνηση του συμπεράσματος q παράγεται μια αντίφαση, που δεν είναι υποχρεωτικά η άρνηση της υπόθεσης (απαγωγή σε άτοπο).

Η έμμεση απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus μέσω της αντιθετοαντίστροφης πρότασης καθιερώθηκε σε πολλά γνωστά βιβλία Ευκλείδειας γεωμετρίας, όπως για παράδειγμα στην κλασική *College Geometry* του Nathan Altshiller-Court ([10] σελ.72-73). Ο Court διατυπώνει εκεί αρχικά το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ. Σ' ένα τρίγωνο η μεγαλύτερη από δύο γωνίες έχει τη μικρότερη εσωτερική διχοτόμο.

Η απόδειξη γίνεται με τη μέθοδο Miller που εκθέσαμε παραπάνω (χρήση της ομοιότητας των τριγώνων $BH Z$ και $\Gamma E H$) και αμέσως ακολουθεί το θεώρημα Steiner-Lehmus ως

ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν δύο εσωτερικές διχοτόμοι ενός τριγώνου είναι ίσες, το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

2 Ο γεωμέτρης H.S.M. Coxeter και το θεώρημα Steiner-Lehmus

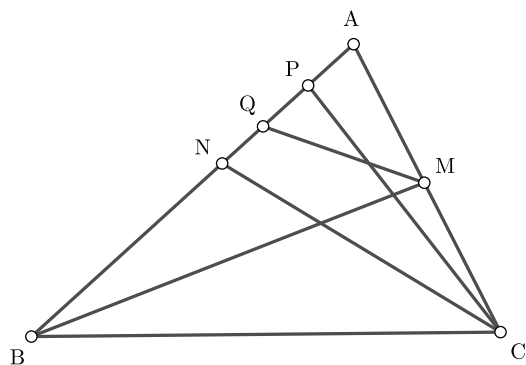
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ενασχόληση με το θεώρημα Steiner-Lehmus του μεγάλου σύγχρονου γεωμέτρη Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003), στο βιβλίο του *Introduction to Geometry* και στο βιβλίο *Geometry*

⁶ Είναι χαρακτηριστικό ότι οι σχετικές συζητήσεις στην Αγγλία άρχισαν το 1850-51 όταν (όπως αναφέρει ο Sylvester αλλά και ο McBride στην ιστορική ανασκόπηση της πρώτης εκατονταετηρίδας του θεωρήματος Steiner-Lehmus), αυτό τέθηκε στις εξετάσεις του Πανεπιστημίου Cambridge, «με την εισαγωγή ενός νέου και ενοχλητικού στοιχείου. Η απόδειξη έπρεπε να είναι άμεση, δηλαδή χωρίς *reductio ad absurdum* (απαγωγή σε άτοπο).» Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι μετά από παρέλευση 100 ετών, στις εισαγωγικές εξετάσεις της Μαθηματικής Σχολής Αθηνών του 1952 τέθηκε το ακόλουθο θέμα: Να αποδειχθεί (όχι δια της εις άτοπον απαγωγής) ότι εάν τρίγωνον δεν είναι ισοσκελές, τότε δύο των διχοτόμων του είναι άνισοι. (Βλ. [11], σελ.28-29).

Revisited που συνέγραψε με τον Samuel Greitzer (1905-1988), ιδρυτή των Μαθηματικών Ολυμπιάδων στις Η.Π.Α. Το πρώτο Κεφάλαιο του βιβλίου Introduction to Geometry, που φέρει τον χαρακτηριστικά λιτό τίτλο «Τρίγωνα», είναι μια ανθολογία προτάσεων της Ευκλείδειας γεωμετρίας τις οποίες ο Coxeter χαρακτηρίζει ως «ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες». Στην 1η έκδοση του βιβλίου το 1961 ([12], σελ.16) το θεώρημα Steiner-Lehmus εμφανίζεται μεταξύ αυτών των προτάσεων ως ανώνυμη άσκηση, με την ακόλουθη διατύπωση και υπόδειξη :

Κάθε τρίγωνο που έχει δύο ίσες διχοτόμους εσωτερικών γωνιών (η καθεμιά μετρούμενη από μία κορυφή μέχρι την απέναντι πλευρά) είναι ισοσκελές.

(Υπόδειξη: Αν οι γωνίες B και C δεν είναι ίσες, η μια θα είναι μικρότερη, έστω $B < C$. Τότε, αν BM και CN είναι οι ίσες διχοτόμοι, θα υπάρχει ένα σημείο P στο AN τέτοιο ώστε $\angle PCN = \frac{1}{2}B$, και ένα σημείο Q στο PN τέτοιο ώστε $BQ = CP$. Συγκρίνετε τις γωνίες P και Q στα ίσα τρίγωνα BMQ και CNP.)



Σχήμα 8

Από το παραπάνω σχήμα διαπιστώνουμε ότι η απόδειξη που σκιαγραφεί ο Coxeter στην υπόδειξή του δεν είναι παρά μια απλοποιημένη εκδοχή της μεθόδου του Casey (βλ. ενότητα 1.6). Από την ισότητα των τριγώνων BMQ και CNP έπεται η ισότητα των γωνιών BQM και CPN, πράγμα άτοπο δεδομένου ότι αυτές είναι εξωτερική και απέναντι εσωτερική γωνία στο τρίγωνο που έχει κορυφές τα P, Q και το σημείο τομής των CP και MQ.

Στην απόδειξη αυτή υπάρχει ένα λεπτό σημείο σχετικά με τη θέση του σημείου Q για το οποίο ισχύει $BQ = CP$ (στην απόδειξη του Casey το αντίστοιχο σημείο λαμβάνεται στο εσωτερικό του BP, επειδή ισχύει $BP > CP$). Για να υπάρχει, όπως υποδεικνύει ο Coxeter, στο τμήμα PN σημείο Q με $BQ = CP$ θα πρέπει να είναι $BN < CP$.

Αυτή η ανισότητα όμως δεν μπορεί να θεωρηθεί δεδομένη, αν λάβουμε υπόψη ότι η αποδεικτική διαδικασία «κτιίζεται» πάνω στην υπόθεση ότι $\hat{B} < \hat{C}$. Αν π.χ. είναι $\hat{B} = 20^\circ$ και $\hat{C} = 60^\circ$, τότε στο τρίγωνο NBC ισχύει $CN < BN$. Επίσης θα είναι $\angle BPC = 120^\circ$, $\angle PNC = 50^\circ$ και άρα στο τρίγωνο CNP ισχύει $CP < CN$. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή είναι $CP < BN$ και άρα το σημείο Q θα ανήκει στο τμήμα BN.⁷

Μία μάλλον απροσδόκητη συνέπεια της δημοσίευσης του θεωρήματος Steiner-Lehmus στο βιβλίο του Coxeter ήταν η επανεμφάνιση της απόδειξης που είχε δώσει ο Lehmus το 1850. Συγκεκριμένα, το 1963 δημοσιεύτηκε στο περιοδικό American Mathematical Monthly μια εργασία των Άγγλων μηχανικών G. Gilbert και D. MacDonnell με τίτλο The Steiner - Lehmus theorem [13]. Στην εργασία αυτή αναπαράγεται, σχεδόν κατά λέξη, η απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο που είχε δημοσιευτεί από τον Lange στο περιοδικό Archiv der Mathematik und Physik πριν από 113 χρόνια, χωρίς όμως να αποδίδεται τώρα η τιμή της ανακάλυψης στον Lehmus. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι οι εκδότες του Monthly αμέσως μετά την απόδειξη, πρόσθεσαν το εξής σχόλιο:

O Martin Gardner, παρουσιάζοντας το βιβλίο Introduction to geometry του Coxeter (Scientific American, 204 (1961) 166-168) περιέγραψε αυτό το φημισμένο θεώρημα με τόσο ενδιαφέροντα τρόπο ώστε εκατοντάδες αναγνώστες έστειλαν δικές τους αποδείξεις. Μπήκε στον κόπο να ξεδιαλύνει όλο αυτό το ογκώδες υλικό καταλήγοντας στο παραπάνω διαμάντι. Αυτό το θεώρημα προτάθηκε το 1840 από τον C. L. Lehmus, και αποδείχτηκε από τον Jacob Steiner. Για την ιστορία του μέχρι το 1940 βλέπε J. A. McBride, Edinburgh Math. Notes, 33 (1943), 1-13.

Αγνοούμε φυσικά αν η απόδειξη των Gilbert και MacDonnell ήταν προϊόν αντιγραφής ή ανεξάρτητης ανακάλυψης: το γεγονός είναι ότι εντυπωσίασε, τουλάχιστον στις αγγλόφωνες χώρες, τη μαθηματική κοινότητα η οποία προφανώς αγνοούσε την απόδειξη του Lehmus. Ιδιαίτερα χαρακτηριστική είναι η στάση των Coxeter και Greitzer στο βιβλίο τους Geometry Revisited. Στην πρώτη έκδοση του βιβλίου το 1967 ([14], σελ.14-16), αφιερώνεται στο θεώρημα Steiner-Lehmus ιδιαίτερη, ομότιτλη ενότητα, ενώ αμέσως μετά τη διατύπωση (με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που είχε εμφανιστεί το 1961 στο Introduction to Geometry, ως άσκηση) ακολουθεί το εξής ιστορικό σχόλιο:

Αυτό το θεώρημα εστάλη στον μέγα Ελβετό γεωμέτρη Jacob Steiner το 1840 από τον C. L. Lehmus (το όνομα του οποίου θα είχε αλλιώς

⁷ Στην δεύτερη έκδοση του βιβλίου το 1969 ([15], σελ.420) η απόδειξη τροποποιείται σε βαθμό που να ταυτίζεται ουσιαστικά με την απόδειξη των Casey-McBride, ενώ το αντίστοιχο σημείο Q τοποθετείται χωρίς καμία συζήτηση στο εσωτερικό του τμήματος BN.

ξεχαστεί πριν από πολλά χρόνια) με την απαίτηση να δοθεί μια καθαρά γεωμετρική απόδειξη. Ο Steiner έδωσε μια αρκετά περίπλοκη απόδειξη η οποία ενέπνευσε πολλούς άλλους να αναζητήσουν απλούστερες μεθόδους. Άρθρα για το θεώρημα Steiner-Lehmus εμφανίστηκαν σε διάφορα περιοδικά τα έτη 1842, 1844, 1848, σχεδόν κάθε χρόνο από το 1854 ως το 1864, και με μεγάλη κανονικότητα στη διάρκεια των επόμενων εκατό ετών.⁸

Στη συνέχεια οι Coxeter και Greitzer, αναφέρουν ότι «μια από τις απλούστερες αποδείξεις» γίνεται με χρήση των εξής λημμάτων:

ΛΗΜΜΑ 1: Αν δύο χορδές ενός κύκλου υποτείνουν διαφορετικές οξείες γωνίες σε σημεία του κύκλου, τότε η μικρότερη γωνία ανήκει στη μικρότερη χορδή.

ΛΗΜΜΑ 2: Αν ένα τρίγωνο έχει δύο διαφορετικές γωνίες, τότε η μικρότερη γωνία έχει τη μεγαλύτερη εσωτερική διχοτόμο.

Για το δεύτερο λήμμα παραπέμπουν στο βιβλίο του Court (βλ. προηγούμενη ενότητα) αλλά αντί της απόδειξης με τη μέθοδο Miller που χρησιμοποιείται εκεί, παραθέτουν την απόδειξη «... που επινοήθηκε από δύο Άγγλους μηχανικούς, τους G. Gilbert και D. MacDonnel...». Αμέσως μετά ακολουθεί μια έμμεση (modus tollens) απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus διατυπωμένη με το χαρακτηριστικό, γλαφυρό ύφος του Coxeter:

Συχνά συμβαίνει να εκφράζεται ένα θεώρημα σε μια ισοδύναμη «αντιθετοαντίστροφη» μορφή. Για παράδειγμα, αντί της φράσης όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί μπορούμε εξίσου καλά να πούμε οι ανήντατοι δεν είναι άνθρωποι. Αντί να αποδείξουμε το ίδιο το θεώρημα, μας αρκεί να αποδείξουμε ότι αν, στο $\triangle ABC$, $B \neq C$, τότε $BM \neq CN$. Όμως αυτό είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 2.

Στη συνέχεια οι Coxeter και Greitzer περιγράφουν τη «διασκεδαστική ιστορία» της απόδειξης των Gilbert και MacDonnel παραθέτοντας το σχόλιο των εκδοτών του American Mathematical Monthly και ολοκληρώνουν την ενότητα για το θεώρημα Steiner-Lehmus με την ακόλουθη ενδιαφέρουσα παρατήρηση:

Κάποιοι αναγνώστες μπορεί να μην αισθάνονται ευτυχείς επειδή η απόδειξη των Gilbert

και MacDonnel, όπως και οι περισσότερες άλλες, είναι «έμμεση»: Αντί για το ίδιο το θεώρημα Steiner-Lehmus αποδεικνύουν το αντιθετοαντίστροφο (Λήμμα 2). Έχουν προταθεί διάφορες δήθεν ευθείες αποδείξεις; αλλά η καθεμιά από αυτές είναι στην πραγματικότητα μεταμφιεσμένη έμμεση απόδειξη. Αυτό το διαπιστώνουμε αν λάβουμε υπόψη ότι στην πράξη μόνο τα εντελώς στοιχειώδη θεωρήματα αποδεικνύονται πλήρως. Όλα τα υπόλοιπα αποδεικνύονται με τη βοήθεια άλλων θεωρημάτων, που είναι ήδη γνωστά: μια ολόκληρη αλυσίδα θεωρημάτων που ανάγονται πίσω στα αξιώματα. Μια απόδειξη δεν μπορεί να διεκδικεί τον τίτλο της άμεσης αν οποιοδήποτε από αυτά τα βοηθητικά θεωρήματα έχει έμμεση απόδειξη. Τώρα, κάποια από τα απλούστερα και πιο βασικά θεωρήματα έχουν έμμεσες αποδείξεις: συνεπώς, αν επιμέναμε σε πλήρη αμεσότητα, το απόθεμα των θεωρημάτων μας θα περιοριζόταν στα πιο τετριμμένα. Είναι αυτή η παρατήρηση αιτία θλίψης; Σύμφωνα με τα λόγια του μεγάλου Άγγλου μαθηματικού G. H. Hardy: «Η μέθοδος Reductio ad absurdum, την οποία ο Ευκλείδης αγαπούσε τόσο πολύ, είναι ένα από τα πιο περίτεχνα όπλα του μαθηματικού. Είναι πολύ πιο περίτεχνο άνοιγμα από οποιοδήποτε σκακιστικό άνοιγμα: ο σκακιστής μπορεί να θυσιάσει ένα πιόνι ή ακόμη και ένα κομμάτι, όμως ο μαθηματικός θυσιάζει το παιχνίδι.»

Στη 2η έκδοση του Introduction to Geometry το 1969 ([15], σελ.9)⁹ το θεώρημα Steiner-Lehmus επανεμφανίζεται ως άσκηση με την ίδια ακριβώς διατύπωση, αλλά τώρα επωνύμως και με την εξής διαφορετική υπόδειξη:

Αν ένα τρίγωνο έχει δύο διαφορετικές γωνίες, τότε η μικρότερη γωνία έχει τη μεγαλύτερη εσωτερική διχοτόμο.

Την υπόδειξη αυτή συνοδεύει παραπομπή στο βιβλίο του Court (που είδαμε παραπάνω) και αμέσως μετά ακολουθεί η εξής περιέργη παραπομπή:

Για την απόδειξη του Lehmus του 1848, βλέπε Coxeter and Greitzer, Geometry Revisited. Random House, New York, 1967, p.15.

⁸ Στο ιστορικό αυτό σχόλιο των Coxeter και Greitzer εντυπωσιάζει η αναφορά σε «περίπλοκη απόδειξη» (complicated proof) του Steiner, επειδή εκείνη που δημοσίευσε ο Steiner το 1844 και εκθέσαμε στην ενότητα 1.1 πολύ δύσκολα θα μπορούσε να χαρακτηριστεί περίπλοκη. Πιθανότατα συγγέεται με άλλη απόδειξη που υπάρχει στην ίδια εργασία του Steiner για μία ειδική περίπτωση των εξωτερικών διχοτόμων όπου το θεώρημα Steiner-Lehmus εξακολουθεί να ισχύει. Η απόδειξη αυτή παρατίθεται στην εργασία του James McBride (βλ. ενότητα 1.6), από την οποία πιθανότατα αντλούν ιστορικές πληροφορίες οι Coxeter και Greitzer.

⁹ Χρησιμοποιούμε την Wiley Classics Library Edition (1989), η οποία περιέχει πρόλογο του Coxeter με χρονολογία «December 1980».

Πρόκειται ακριβώς για το βιβλίο που μόλις εξετάσαμε, αλλά στο οποίο η απόδειξη του Lehmus είχε αποδοθεί αδίκως στους Gilbert και MacDonnell!

Προφανώς ο Coxeter υπονοεί σιωπηρά κάποια ανατύπωση του *Geometry Revisited* στην οποία είχε γίνει αποκατάσταση της αδικίας.¹⁰

Πράγματι στην ανατύπωση [16] του βιβλίου από την Mathematical Association of America (η οποία δεν φέρει νέα χρονολογία αλλά έγινε μετά το 1974 και περιέχει τον πρόλογο του 1967 που υπογράφουν οι Coxeter και Greitzer), έχει διαγραφεί η αναφορά στην «περίπλοκη απόδειξη» του Steiner, ενώ το εδάφιο που αναφέρονταν στη «διασκεδαστική ιστορία» της συγκεκριμένης απόδειξης (με αναφορές στους Gardner, Gilbert & MacDonnell και στο σχόλιο των εκδοτών του *American Mathematical Monthly*) έχει αντικατασταθεί από το εξής ([16], σελ.16):

Ο Archibald Henderson έγραψε μια από τις πολλές βιογραφίες του Bernard Shaw καθώς και ένα φυλλάδιο με θέμα *The twenty-seven lines upon the cubic surface*. Στην εργασία του *The Lehmus-Steiner-Terquem problem in global survey* (*Scripta Mathematica*, 21, 1955, pp.223-232, 309-312) αποδίδει μια απόδειξη που μοιάζει με τη δική μας στον ίδιο τον Lehmus (1850). Η ιδέα της αντικατάστασης του θεωρήματος από μια ισχυρότερη αντιθετοαντίστροφη πρόταση εμφανίζεται σε μια εργασία του Victor Thébault (*Mathesis*, 44, 1930, p.97), ο οποίος απέδειξε το Λήμμα 2 όπως ακριβώς παραπάνω και στη συνέχεια συμπεράνε το θεώρημα ως «πόρισμα».

Ο Henderson φαίνεται ότι ήταν κάπως δυστυχής με την απόδειξη του Lehmus, όπως και με την προγενέστερη απόδειξη του Steiner, επειδή δεν είναι «άμεσες» ...

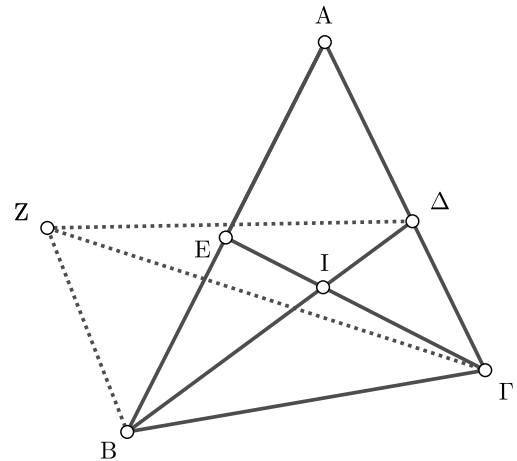
Μετά την απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus στη 2η έκδοση του *Introduction to Geometry* ([15], σελ.420), που ουσιαστικά ταυτίζεται (όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην υποσημείωση 7) με την απόδειξη των Casey-McBride, ο Coxeter σημειώνει ότι αυτή υπερέχει όλων με την έννοια ότι είναι «απόλυτη», δηλαδή ανεξάρτητη από το αξίωμα της παραλληλίας.

¹⁰ Το *Geometry Revisited* εκδόθηκε για πρώτη φορά ως 19ος τόμος της σειράς *New Mathematics Library* που ξεκίνησε το 1961 με πρωτοβουλία της *School Mathematics Study Group* και των εκδοτικών οίκων *Random House* και *The L. W. Singer Company*. Από το 1975 την έκδοση της σειράς (μαζί με πολυάριθμες ανατυπώσεις των προηγούμενων τόμων) ανέλαβε η *Mathematical Association of America*.

3 Άμεσες αποδείξεις του θεωρήματος Steiner-Lehmus

3.1 Μέθοδος του Hesse

Η θεωρούμενη πρώτη άμεση απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus επινοήθηκε το 1842 από τον F.G. Hesse αλλά δημοσιεύτηκε το 1874 στο [17], ύστερα από παρέμβαση του N.M. Ferrers (1829-1903), μαθηματικού και συνεργάτη του J.J. Sylvester στο Cambridge.



Σχήμα 9

Η κεντρική ιδέα της άμεσης απόδειξης του Hesse είναι, με δεδομένη την ισότητα των διχοτόμων ΒΔ και ΓΕ, να αποδειχθεί η ισότητα των τμημάτων ΒΕ και ΓΔ. Για το σκοπό αυτό κατασκευάζεται το σημείο Ζ έτσι ώστε ΖΒ = ΒΕ και ΖΔ = ΒΓ, ως σημείο τομής των κύκλων (Β, ΒΕ) και (Δ, ΒΓ).

Τότε τα τρίγωνα ΖΒΔ και ΒΕΓ είναι ίσα, επειδή έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, και επομένως ισχύουν οι ισότητες

$$\hat{B}\hat{E}\hat{G} = \hat{Z}\hat{B}\hat{D} \text{ και } \hat{Z}\hat{D}\hat{B} = \hat{E}\hat{G}\hat{B} = \frac{\hat{\Gamma}}{2} \quad (1)$$

Επειδή η ΕÎΔ είναι εξωτερική γωνία στα τρίγωνα ΒΕΙ και ΓΔΙ, θα ισχύουν οι ισότητες

$$\hat{B}\hat{E}\hat{G} + \frac{\hat{B}}{2} = \hat{E}\hat{I}\hat{D} \text{ και } \hat{\Gamma}\hat{D}\hat{B} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{E}\hat{I}\hat{D}$$

από τις οποίες συμπεραίνουμε ότι

$$\hat{B}\hat{E}\hat{G} + \frac{\hat{B}}{2} = \hat{\Gamma}\hat{D}\hat{B} + \frac{\hat{\Gamma}}{2},$$

οπότε λόγω των (1), θα είναι

$$\hat{Z}\hat{B}\hat{D} + \frac{\hat{B}}{2} = \hat{\Gamma}\hat{D}\hat{B} + \hat{Z}\hat{D}\hat{B},$$

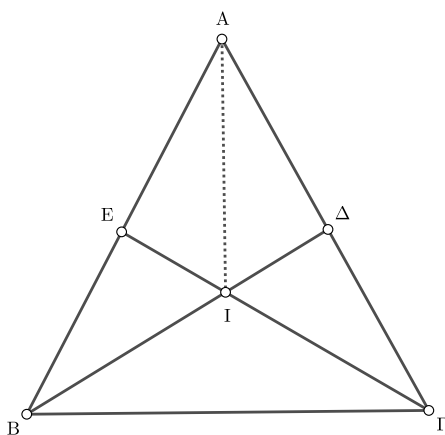
δηλαδή $\hat{Z}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{Z}$. Επειδή $\hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{Z} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{B} + \hat{B}\hat{\Delta}\hat{Z} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{B} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{E}\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = 180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2}$ και $\frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} < 90^\circ$, συμπεραίνουμε ότι είναι $\hat{Z}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}\hat{Z} > 90^\circ$. Επίσης είναι $\hat{Z}\hat{\Gamma} = \hat{Z}\hat{\Gamma}$ και $\hat{Z}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{\Gamma}$.

Από τα προηγούμενα έπεται τα τρίγωνα $\hat{Z}\hat{\Gamma}\hat{B}$ και $\hat{Z}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ είναι ίσα, επειδή έχουν δύο ζεύγη ίσων πλευρών και ένα ζεύγος ίσων γωνιών που είναι αμφοτέρως αμβλείες και βρίσκονται απέναντι από ίσες πλευρές.¹¹ Άρα θα είναι $\hat{Z}\hat{B} = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ και επειδή εκ κατασκευής $\hat{Z}\hat{B} = \hat{B}\hat{E}$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\Gamma}\hat{\Delta} = \hat{B}\hat{E}$. Τα τρίγωνα επομένως $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{\Delta}$ και $\hat{B}\hat{\Gamma}\hat{E}$ είναι ίσα και κατά συνέπεια ισχύει $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Quod erat demonstrandum.

ΣΧΟΛΙΟ. Είναι χαρακτηριστικό ότι η προηγούμενη απόδειξη είχε υποβληθεί για αξιολόγηση στην πρυτανεία του πανεπιστημίου Cambridge από την Christine Chart, φίλη του Hesse, με αφορμή τις συζητήσεις που διεξάγονταν στην Βρετανία από τις αρχές της δεκαετίας του 1850 για τον έμμεσο χαρακτήρα όλων των αποδείξεων, αλλά και το γεγονός ότι η συγκεκριμένη γεωμετρική πρόταση είχε διεγείρει τα προηγούμενα χρόνια την προσοχή κορυφαίων μαθηματικών της Ευρώπης. Ο Ferrers μάλιστα, συνιστώντας τη δημοσίευση της απόδειξης του Hesse στους εκδότες του Philosophical Magazine, τους ενημερώνει ότι σύμφωνα με τη γνώμη του Sylvester αυτή είναι «απολύτως αξιόπιστη» (thoroughly sound).

3.2 Μέθοδος του Henderson

Μια άμεση και απλή (τουλάχιστον φαινομενικά) απόδειξη παρουσίασε το 1937 ο A. Henderson στο [18]. Η απόδειξη αυτή στηρίζεται σε ένα κριτήριο ισότητας δύο τριγώνων το οποίο, όπως γράφει ο Henderson χαρακτηριστικά «...ξεχωρίζει με την απουσία του από όλα ουσιαστικά τα βιβλία γεωμετρίας σε οποιαδήποτε γλώσσα.».



Σχήμα 10

¹¹ Δηλαδή το λεγόμενο σήμερα 4ο κριτήριο ισότητας δύο τριγώνων, το οποίο στην παλαιότερη βιβλιογραφία αναφέρονταν και ως «διφορούμενη περίπτωση» (ambiguous case).

¹² Στην ελληνική βιβλιογραφία, το πρόβλημα αυτό και το αντίστοιχο κριτήριο ισότητας εμφανίζονται μάλλον για πρώτη φορά στο [5], σελ.61. Για το συγκεκριμένο (και πολύ ενδιαφέρον) πρόβλημα γεωμετρικής κατασκευής βλ. επίσης στα [19], σελ.160 και [20], σελ.166 (ασκήσεις 512 και 513).

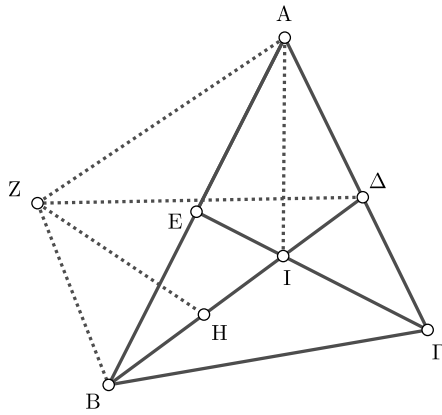
Το κριτήριο αυτό είναι το εξής: Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες: i) δύο πλευρές, ii) τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από αυτές και iii) τις αντίστοιχες εσωτερικές διχοτόμους, τότε είναι ίσα μεταξύ τους. Αν λοιπόν στο τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ οι εσωτερικές διχοτόμοι $\hat{B}\hat{\Delta}$ και $\hat{\Gamma}\hat{E}$ είναι ίσες και τέμνονται στο $\hat{I}$, τότε η $\hat{A}\hat{I}$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Delta}$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{E}$ είναι ίσα σύμφωνα με το προαναφερθέν κριτήριο ισότητας. Άρα ισχύει $\hat{A}\hat{B} = \hat{A}\hat{\Gamma}$, δηλαδή το τρίγωνο $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ είναι ισοσκελές.

ΣΧΟΛΙΟ. Το κριτήριο ισότητας τριγώνων στο οποίο στηρίζεται η προηγούμενη απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus, προκύπτει ως άμεσο πόρισμα του προβλήματος γεωμετρικής κατασκευής ενός τριγώνου όταν δίνεται μία πλευρά, η απέναντι προς αυτήν γωνία και η αντίστοιχη εσωτερική διχοτόμος (το οποίο έχει μοναδική λύση). Πρόκειται για ένα απαιτητικό πρόβλημα η επίλυση του οποίου, εκτός από την τυπική μεθοδολογία της ανάλυσης και της σύνθεσης, απαιτεί τη χρήση βοηθητικών γραμμών, γεωμετρικών τόπων και κατασκευών καθώς και μία λεπτομερή διερεύνηση η οποία κατοχυρώνει τη μοναδικότητα της λύσης.¹² Όπως γίνεται φανερό, τα στοιχεία αυτά καθιστούν μάλλον παραπλανητική τη συντομία και την απλότητα που χαρακτηρίζουν την περιγραφή της προηγούμενης απόδειξης από τον Henderson. Στην ίδια εργασία ο Henderson παραθέτει επίσης ένα μεγάλο αριθμό νέων (και μάλλον περίπλοκων) αποδείξεων του θεωρήματος Steiner-Lehmus, επιχειρώντας παράλληλα να το εντάξει σε ένα ευρύτερο πλαίσιο που ερμηνεύει την πραγματική φύση των δυσκολιών. Όπως γράφει χαρακτηριστικά (σελ.246):

... I may wellnigh venture to describe this paper as an essay on the internal bisector problem to end all essays on the internal bisector problem.

3.3 Μέθοδος των Williams & Savage

Η άμεση απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus που ακολουθεί δημοσιεύτηκε το 1946 στη συλλογή προβλημάτων [21].



Σχήμα 11

Η εξαιρετικά απλή κεντρική ιδέα αυτής της απόδειξης είναι, με δεδομένη την ισότητα των δύο διχοτόμων, να αποδειχθεί η ισότητα των αντίστοιχων γωνιών (ακριβέστερα, των γωνιών $\hat{A}\hat{B}\Delta$ και $\hat{A}\hat{\Gamma}E$). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται η ίδια ακριβώς τεχνική με την απόδειξη του Hesse. Συγκεκριμένα, κατασκευάζεται σημείο Z τέτοιο, ώστε $ZB = AE$ και $Z\Delta = A\Gamma$ οπότε το τρίγωνο $ZB\Delta$ είναι τώρα ίσο με το τρίγωνο $AE\Gamma$. Άρα ισχύουν οι ισότητες γωνιών

$$Z\hat{\Delta}B = A\hat{\Gamma}E \left(= \frac{\hat{\Gamma}}{2} \right) \quad (1) \quad \text{και} \quad B\hat{Z}\Delta = \hat{A} \quad (2)$$

Από την (2) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία B, Z, A, Δ είναι ομοκυκλικά και άρα ισχύει

$$A\hat{Z}\Delta = A\hat{B}\Delta \left(= \frac{\hat{B}}{2} \right) \quad (3)$$

Λόγω των (1) και (3) αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $Z\hat{\Delta}B = A\hat{Z}\Delta$, δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι οι ZA και BΔ είναι παράλληλες.

Επειδή η AI είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και η $A\hat{I}\Delta$ εξωτερική γωνία του τριγώνου ABI , θα ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$A\hat{Z}\Delta = \frac{\hat{B}}{2} = A\hat{I}\Delta - \frac{\hat{A}}{2} \stackrel{(2)}{=} A\hat{I}\Delta - \frac{B\hat{Z}\Delta}{2}.$$

Αν ZH είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{Z}\Delta$, τότε από την τελευταία ισότητα έχουμε

$$A\hat{Z}\Delta = A\hat{I}\Delta - \Delta\hat{Z}H \Leftrightarrow A\hat{Z}\Delta + \Delta\hat{Z}H = A\hat{I}\Delta \Leftrightarrow A\hat{Z}H = A\hat{I}\Delta \quad (4)$$

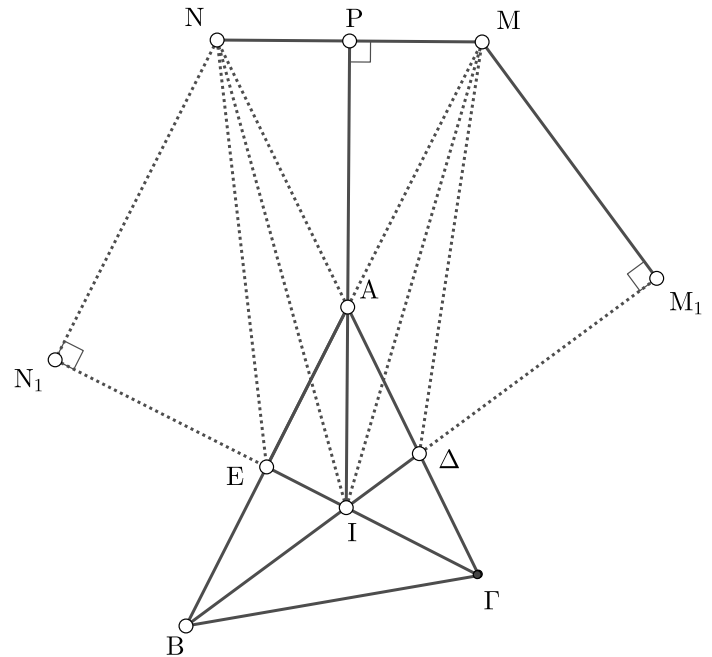
Από την (4) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A, Z, H, I είναι ομοκυκλικά και επομένως οι ZH , AI χορδές του αντίστοιχου

κύκλου. Επειδή όμως $ZH = AI$ (ως διχοτόμοι αντίστοιχων γωνιών στα ίσα τρίγωνα $ZB\Delta$ και $AE\Gamma$), συμπεραίνουμε από την ισότητα των αντίστοιχων τόξων ότι οι χορδές ZA και HI θα είναι παράλληλες, ο.ε.δ.

ΣΧΟΛΙΟ. Όπως βλέπουμε, στην απόδειξη των Williams και Savage δεν απαιτείται η χρήση του 4ου κριτηρίου ισότητας των τριγώνων, με «τίμημα» την ανάγκη προσφυγής στις ιδιότητες των εγγράψιμων τετραπλεύρων και των χορδών του κύκλου. Η απόδειξη του Hesse δικαιούται λοιπόν τον τίτλο της άμεσης απόδειξης που χρησιμοποιεί αποκλειστικά τα εννοιολογικά εργαλεία του λεγόμενου πρώτου βιβλίου της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.¹³

3.4 Μέθοδος του Malečenič

Μια νέα απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus, η οποία μάλιστα χαρακτηρίζονταν στον τίτλο της ως «άμεση», δημοσιεύτηκε το 1970 από τον Jovan Malečenič στο [22].



Σχήμα 12

Η κεντρική ιδέα της απόδειξης του Malečenič είναι, με δεδομένη την ισότητα των εσωτερικών διχοτόμων $B\Delta$ και ΓE , να αποδειχθεί η ισότητα των γωνιών $E\hat{I}A$ και $\Delta\hat{I}A$. Για το σκοπό αυτό προεκτείνονται οι πλευρές AB και $A\Gamma$ προς το A κατά τμήματα $AM = AN = B\Gamma$. Επίσης προεκτείνεται και η διχοτόμος AI του $AB\Gamma$ μέχρι να συναντήσει

¹³ Ο «απλός» ή «σύνθετος» χαρακτήρας των αποδείξεων του θεωρήματος Steiner-Lehmus συνδέεται συνήθως με το είδος των γεωμετρικών εννοιών ή τεχνασμάτων που χρησιμοποιούν, και στην πρώτη περίπτωση καθορίζεται από τη θέση των εννοιών μέσα στο θεωρητικό σύστημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Δεν είναι άσκοπο λοιπόν να υπενθυμίσουμε εδώ ότι η επιπεδομετρία αναπτύσσεται στα 6 πρώτα βιβλία των Στοιχείων του Ευκλείδη με την ακόλουθη σειρά: Στα βιβλία I και II εξετάζονται ιδιότητες των βασικών γεωμετρικών σχημάτων (όπως τρίγωνα, ορθογώνια και τετράγωνα), στο βιβλίο III τα εγγράψιμα και περιγράψιμα πολύγωνα στον κύκλο, και στα βιβλία V και VI η θεωρία των αναλογιών και των ομοίων σχημάτων.

τη ΝΜ σε σημείο Ρ. Επειδή η ΑΡ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΝΜ θα ισχύει $AP \perp NM$ και $NP = PM$. Επίσης από τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΡΝΙ και ΡΜΙ προκύπτει ότι

$$\hat{P}\hat{I}\hat{N} = \hat{P}\hat{I}\hat{M} \quad (1)$$

και

$$IN = IM \quad (2).$$

Τα τρίγωνα ΕΒΓ και ΕΑΝ έχουν από κατασκευή ίσες βάσεις $B\Gamma = AN$ και ίσα αντίστοιχα ύψη, επειδή το Ε ως σημείο της διχοτόμου ΓΕ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

Άρα είναι ισεμβαδικά, δηλαδή:

$$(EB\Gamma) = (EAN) \quad (3)$$

Ομοίως προκύπτει ότι:

$$(\Delta B\Gamma) = (\Delta AM) \quad (4)$$

$$(3) \implies (EB\Gamma) + (AEG) = (EAN) + (AEG) \implies (AB\Gamma) = (NEG)$$

$$(4) \implies (\Delta B\Gamma) + (AB\Delta) = (\Delta AM) + (AB\Delta) \implies (AB\Gamma) = (MB\Delta)$$

Από δύο τελευταίες ισότητες έπεται ότι τα τρίγωνα ΝΕΓ και ΜΒΔ είναι ισεμβαδικά και επειδή έχουν τις πλευρές ΓΕ και ΒΔ ίσες, θα έχουν ίσα και τα αντίστοιχα ύψη, δηλαδή

$$NN_1 = MM_1 \quad (5)$$

Από τις ισότητες (2) και (5) συμπεραίνουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα N_1NI και M_1MI είναι ίσα και επομένως ισχύει

$$E\hat{I}\hat{N} = \Delta\hat{I}\hat{M} \quad (6)$$

Από τις (1) και (6), με πρόσθεση κατά μέλη, έπεται ότι $E\hat{I}\hat{A} = \Delta\hat{I}\hat{A}$, άρα σύμφωνα με την ιδιότητα της εξωτερικής γωνίας στα τρίγωνα ΑΙΓ και ΑΙΒ θα είναι

$$\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2}$$

και τελικά $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, δηλαδή το ΑΒΓ ισοσκελές.

ΣΧΟΛΙΟ. Εκείνο που εντυπωσιάζει στην προηγούμενη απόδειξη είναι ασφαλώς ο ευφάνταστος μετασχηματισμός του βασικού σχήματος, και τα γεωμετρικά εννοιολογικά εργαλεία που επιστρατεύθηκαν προκειμένου να αποδειχθεί η ισότητα δύο χαρακτηριστικών γωνιών που εξασφαλίζουν τελικά την ισότητα των γωνιών της βάσης του αρχικού τριγώνου. Φανερό είναι επίσης ότι πίσω από τη σύνθεση της συγκεκριμένης απόδειξης «κρύβεται» μια αναλυτική πορεία αναζήτησης και διαδοχικών αναγωγών (ενδεχομένως με πολλά αδιέξοδα), που οδήγησαν τελικά στο πολυπόθητο «εύρημα».

Αυτή η αναλυτική πορεία είναι προφανώς το καθοριστικό στοιχείο που συνιστά την ουσία της ερευνητικής μαθηματικής δραστηριότητας.

3.5 Η «μετρική» μέθοδος

Στην εργασία [6] που δημοσίευσε ο Th. Lange το 1850, με την έμμεση απόδειξη του D. C. L. Lehmus (βλ. ενότητα 1.4), συμπεριλαμβάνεται επίσης και μία απόδειξη με χρήση των αλγεβρικών τύπων που παρέχουν τα μήκη των εσωτερικών διχοτόμων δ_β και δ_γ ενός τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει των πλευρών του a, β, γ :

$$\delta_\beta^2 = \alpha\gamma - \frac{\alpha\beta^2\gamma}{(\alpha + \gamma)^2}$$

και

$$\delta_\gamma^2 = \alpha\beta - \frac{\alpha\beta\gamma^2}{(\alpha + \beta)^2}$$

Αν ισχύει $\delta_\beta = \delta_\gamma = \delta$ τότε, γράφει ο Lange, απαλείφοντας το δ από τις δύο προηγούμενες ισότητες παίρνουμε

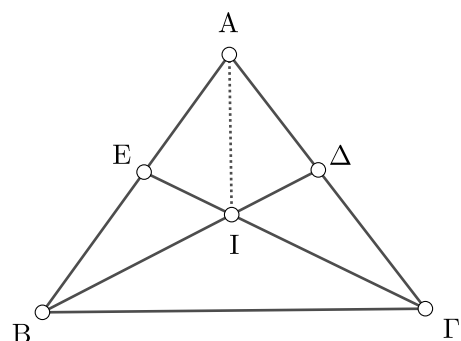
$$\alpha(\alpha + \beta + \gamma)(\gamma - \beta) [\alpha^3 + (\gamma + \beta)(\beta\gamma + \alpha^2) + 3\alpha\beta\gamma] = 0$$

η οποία ισότητα ικανοποιείται μόνο όταν $\gamma - \beta = 0$ δηλαδή $\gamma = \beta$.

ΣΧΟΛΙΟ. Η προηγούμενη είναι κατά μία έννοια η πλέον άμεση (όχι μόνο επειδή ο Lange παραλείπει τους ενδιάμεσους αλγεβρικούς υπολογισμούς!), αλλά και η λιγότερο γεωμετρική απόδειξη του θεωρήματος Steiner-Lehmus. Πρέπει βέβαια να έχουμε υπόψη ότι οι τύποι που παρέχουν τα μήκη των διχοτόμων ενός τριγώνου ανήκαν στο παρελθόν στην διδακτέα ύλη της σχολικής γεωμετρίας και ότι η απόδειξή τους απαιτεί χρήση του λεγόμενου θεωρήματος της διχοτόμου, του περιγεγραμμένου κύκλου και ομοίων τριγώνων.¹⁴

3.6 Μια ανασκόπηση των άμεσων αποδείξεων του θεωρήματος -Steiner-Lehmus και μερικά συμπεράσματα

Οι προηγούμενες αποδείξεις του θεωρήματος, έχοντας ως αφετηρία την ισότητα των δύο εσωτερικών διχοτόμων, στηρίζονται στην απόδειξη της ισότητας δύο ευθυγράμμων τμημάτων ή δύο γωνιών ή δύο τριγώνων από την οποία συνάγεται αμέσως ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.



¹⁴ Η απόδειξη αυτή υπάρχει σε όλα τα κλασικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας, καθώς και στο σχολικό [23] (σελ.38-39)

Στην απόδειξη του Hesse αποδεικνύεται η ισότητα των τμημάτων BE και ΓΔ, στην απόδειξη του Henderson αποδεικνύεται με ένα νέο κριτήριο ισότητας η ισότητα των τριγώνων ABΔ και AGE, στην απόδειξη των Williams & Savage αποδεικνύεται η ισότητα των γωνιών $\widehat{AB\Delta}$ και $\widehat{A\Gamma E}$, στην απόδειξη του Malečević αποδεικνύεται η ισότητα των γωνιών EIA και $\widehat{\Delta\Gamma A}$ ενώ στη «μετρική» απόδειξη η ισότητα των πλευρών του τριγώνου προκύπτει ως αποτέλεσμα αλγεβρικών πράξεων.

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις η απόδειξη ακολουθεί μια ευθεία πορεία *modus ponens*: Με υπόθεση την ισότητα $B\Delta = \Gamma E$ (και όχι τη άρνηση αυτής ή ότι το τρίγωνο ABΓ δεν είναι ισοσκελές), το επιδιωκόμενο συμπέρασμα (δηλαδή κάποια από τις προηγούμενες ισότητες) προκύπτει μέσω διαδοχικών συνεπαγωγών οι οποίες απαιτούν, όπως διαπιστώσαμε, ουσιαστική ερευνητική δραστηριότητα και ευφάνταστα γεωμετρικά τεχνάσματα. Αυτή η αποδεικτική πορεία ανοίγει ένα ευρύ πεδίο έρευνας στο θεώρημα Steiner-Lehmus, με την αναζήτηση κατάλληλων μετασχηματισμών του προηγούμενου βασικού σχήματος και εναλλακτικών γραμμικών ή γωνιακών σχέσεων, από την ισχύ των οποίων συνάγεται άμεσα ότι το αρχικό τρίγωνο είναι ισοσκελές.¹⁵ Η δημοσίευση της απόδειξης του Malečević και ο χαρακτηρισμός της από τον ίδιο στον τίτλο της εργασίας ως «άμεσης», επανέφερε στο προσκήνιο το παλαιό ζήτημα της διάκρισης των αποδείξεων του θεωρήματος Steiner-Lehmus σε «άμεσες» και «έμμεσες» με βάση τις γεωμετρικές προτάσεις στις οποίες στηρίζονται. Ο Mordechai Lewin αμφισβήτησε στο [25] τον άμεσο χαρακτήρα της απόδειξης του Malečević αναλύοντας μία προς μία τις επίμαχες περιπτώσεις. Για παράδειγμα, η ιδιότητα της εξωτερικής γωνίας τριγώνου που χρησιμοποιείται στο τελευταίο στάδιο, στηρίζεται στην πρόταση για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου και αυτή με τη σειρά της στην ισότητα των εντός εναλλάξ γωνιών που σχηματίζουν δύο παράλληλες και μια τέμνουσα, η οποία αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο.

Έχουμε την άποψη ότι η εμμονή στο χαρακτηρισμό των αποδείξεων ως «άμεσων» ή «έμμεσων» με βάση την απαγωγική διάταξη των θεωρητικών προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δεν αποτελεί μια δημιουργική προσέγγιση στη μελέτη του θεωρήματος Steiner-Lehmus. Ο Archibald Henderson είχε ισχυριστεί το 1937, κάπως υπεροπτικά, ότι η εργασία του θα έβαζε οριστικό τέλος σε όλες τις ερευνητικές εργασίες γι' αυτό το θεώρημα (βλ. ενότητα 3.2). Οι έρευνες όμως συνεχίζονται με αμείωτο ρυθμό ως τις μέρες μας, με την εμφάνιση νέων μελετών που διευρύνουν σημαντικά τα εννοιολογικά εργαλεία και την αποδεικτική

μεθοδολογία, αγνοώντας τη διαμάχη για τον «άμεσο» ή «έμμεσο» χαρακτήρα των αποδείξεων. Μια περιήγηση στα πλούσια αρχεία του ηλεκτρονικού περιοδικού Forum Geometricorum [26] που εκδίδεται από το 2001, αποκαλύπτει αρκετές εργασίες στις οποίες παρουσιάζονται νέες ενδιαφέρουσες αποδείξεις (κυρίως τριγωνομετρικές)¹⁶ καθώς και απροσδόκητες γενικεύσεις του θεωρήματος. Το ζήτημα των γενικεύσεων του θεωρήματος Steiner-Lehmus αποτελεί ένα άλλο συναρπαστικό πεδίο έρευνας και στην κατηγορία αυτή ανήκει μια εργασία των Γιώργου Τσίντσιφα και Κώστα Δόρτσιου που παρουσιάστηκε πρόσφατα στη 10η Μαθηματική Εβδομάδα [28]. Το θεώρημα Steiner-Lehmus ανήκει σ' εκείνη την κατηγορία των γεωμετρικών προτάσεων που διατηρούν ζωντανή την ερευνητική δραστηριότητα στην κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία και είναι βέβαιο ότι τα επόμενα χρόνια θα εμφανιστούν νέα εντυπωσιακά αποτελέσματα και γενικεύσεις.¹⁷

Ολοκληρώνοντας αυτή την εργασία δεν μπορούμε να αποφύγουμε τον πειρασμό της διατύπωσης ενός σχολίου για τις συζητήσεις που διεξάγονται τα τελευταία χρόνια σχετικά με την υποβάθμιση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο. Οι συζητήσεις αυτές ανακυκλώνονται διαρκώς γύρω από επιχειρήματα που συνδέουν τη διδακτική αναβάθμιση με τις εξετάσεις κάθε είδους (πανελλαδικές ή ενδοσχολικές), ενώ αποφεύγουν να θίξουν το ζήτημα της βασικής κατάρτισης και επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών πάνω στις νεότερες ερευνητικές δραστηριότητες και εξελίξεις. Έχουμε την άποψη ότι η άγνοια ή αδιαφορία της μαθηματικής εκπαιδευτικής κοινότητας για αυτό το ζήτημα συνιστά μία βασική αιτία της υποβάθμισης και σε κάθε περίπτωση, πολύ πιο ισχυρή από την ένταξη ή όχι της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στα «εξεταζόμενα» μαθήματα.

Βιβλιογραφία

- [1] J. J. SYLVESTER: *On a simple Geometrical Problem illustrating a conjectured Principle in the Theory of Geometrical Method*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. Volume IV, Fourth Series, 366-369 (1852).
- [2] J. STEINER: *Elementare Lösung einer Aufgabe über das ebene und sphärische Dreieck*. Journal für die reine und angewandte Mathematik. Acht und zwanzigster Band (28), Heft IV, 375-379 (1844).
- [3] M. DESCUBE: *Théorème de Géométrie*. Journal

¹⁵ Εξίσου ενδιαφέρουσα και χρήσιμη για την έρευνα είναι βέβαια η αναζήτηση γραμμικών ή γωνιακών σχέσεων που δεν εξασφαλίζουν ότι το αρχικό τρίγωνο θα είναι πάντοτε ισοσκελές. Μια καταγραφή τέτοιων σχέσεων υπάρχει στο [24], σελ.17.

¹⁶ Μια συγκριτική μελέτη ορισμένων από αυτές τις νέες αποδείξεις γίνεται στο [27].

¹⁷ Μια άλλη διάσημη γεωμετρική πρόταση που ανήκει στη συγκεκριμένη κατηγορία είναι η λεγόμενη ανισότητα Erdős-Mordell. Για μια ανάλυση των αποδείξεων και γενικεύσεων βλ. στο [29].

- de Mathématiques Élémentaires et Spéciales Tome Quatrième, 538-539 (1880).
- [4] F.G.-M.: *Ασκήσεις Γεωμετρίας (Ιησουϊτών)*. Μετάφραση Δ. Γκίόκα, Εκδόσεις Καραβία, Αθήναι, (1952).
- [5] Ι. ΠΑΝΑΚΗΣ: *Το ισοσκελές τρίγωνον και αι ιδιότητες αυτού*. Εκδόσεις Σιδέρη, Αθήναι, (1953).
- Το βιβλίο είναι διαθέσιμο στη διεύθυνση:
<https://parmenides52.blogspot.com/2015/04/1973.html>
- [6] TH. LANGE: *Nachtrag zu dem Aufsatz in Thl XIII Nr. XXXIII*. Archiv der Mathematik und Physik, Funfzehnter Theil (15), 221-226 (1850).
- [7] J. S. MACKAY: *History of a theorem in Elementary Geometry*. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Volume 20, 18-22 (1901).
- [8] W. E. BLEICK: *Angle bisectors of an isosceles triangle*. The American Mathematical Monthly Vol 55 No 8, 495. (1948)
- [9] J. A. MCBRIDE: *The equal internal bisectors theorem, 1840-1940.... Many solutions or none? A centenary account*. The Edinburgh Mathematical Notes, Vol. 33, 1-13 (1943).
- [10] N. ALTSHILLER-COURT: *College Geometry - An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*. Reprint of the 1952 Second Edition by Barnes & Noble, Dover, New York, (2007).
- [11] Α. ΠΑΛΛΑΣ: *Θέματα δοθέντα εις τας εισαγωγικάς εξετάσεις των ανωτέρων και ανωτάτων σχολών του κράτους κατά το έτος 1952 μετά των λύσεων αυτών*. Εκδοτικός Οίκος Α. Παπαζήση, Αθήναι, (1952).
- Τα «Ετήσια Δελτία Θεμάτων» που ο Αριστείδης Πάλλας εξέδιδε ανελλιπώς από το 1947 μέχρι το 1980 αποτελούν πολύτιμη πηγή για την ιστορία της νεοελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης και είναι διαθέσιμα στη διεύθυνση:
<https://parmenides51.blogspot.com/p/ethsia-deltia-toy-palla.html>
- [12] H.S.M. COXETER: *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, New York, (1961).
- [13] G. GILBERT & D. MACDONNEL: *The Steiner-Lehmus theorem*. The American Mathematical Monthly, Vol. 70, No, 1, 79-80 (1963).
- [14] H.S.M. COXETER & S.L. GREITZER: *Geometry Revisited*. Random House, New York, (1967).
- [15] H.S.M. COXETER: *Introduction to Geometry*. Reprint of the 1969 Second Edition, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, New York, (1989).
- [16] H.S.M. COXETER & S.L. GREITZER: *Geometry Revisited*. New Mathematical Library 19, The Mathematical Association of America.
- Πρόκειται για ανατύπωση με προσθήκες της 1ης έκδοσης του 1967 η οποία, σύμφωνα με τις χρονολογίες του καταλόγου των βιβλιογραφικών αναφορών στις σελίδες 181-182, πρέπει να έγινε μετά το 1974.
- [17] F.G. HESSE: *Direct Solution of a Geometrical Problem*. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Fourth Series, Volume XLVII, 354-357 (1874).
- [18] A. HENDERSON: *A Classic Problem in Euclidean Geometry*. Journal of the Mitchell Society, 246-281 (December 1937).
- [19] Ι. ΠΑΝΑΚΗΣ: *Γεωμετρία του Τριγώνου - Γεωμετρικά Κατασκευαί, Τόμος Γ'*. Εκδόσεις Gutenberg, Αθήναι, (1970).
- Το βιβλίο είναι διαθέσιμο στη διεύθυνση:
<https://parmenides52.blogspot.com/2015/04/1973.html>
- [20] Σ. Κανέλλος: *Ευκλείδειος Γεωμετρία Δ', Ε', ΣΤ' Γυμνασίου Θετικής Κατευθύνσεως, Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων*, (1975).
- Μια μεταγενέστερη έκδοση σε δύο τόμους είναι διαθέσιμη στη διεύθυνση:
<https://parmenides52.blogspot.com/p/school.html> (Οι ασκήσεις 512 και 513 της παραπομπής βρίσκονται στη σελίδα 162 του πρώτου τόμου)
- [21] W.T. WILLIAMS & G.H. SAVAGE: *The Third Penguin Problem Book*. Penguin Books, (1946). (Problem 120, A Geometrical Doodlebug, p.55 & p.129).
- [22] J. MALEČEVIČ: *A direct proof of the Steiner-Lehmus theorem*. Mathematics Magazine 43, 101-102 (1970).
- [23] Ι. ΠΑΝΑΚΗΣ: *Μαθηματικά Ε' Γυμνασίου Θετικής Κατευθύνσεως. Τόμος 2ος*. Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, Αθήναι, (1968).
- [24] Ι. SHARYGIN : *Πώς γεννιέται ένα πρόβλημα. Η τέχνη της σύνθεσης προβλημάτων*. Quantum 8(2), 12-21 (2001).

Τα τεύχη της ελληνικής έκδοσης του περιοδικού είναι διαθέσιμα στη διεύθυνση:

<https://ph403.edu.physics.uoc.gr/quantum.php>

[25]] M. LEWIN: *On the Steiner-Lehmus theorem*. Mathematics Magazine 47, 87-89 (1974).

[26]] FORUM GEOMETRICORUM. A Journal on Classical Euclidean Geometry and Related Areas. Τα

τεύχη του περιοδικού είναι διαθέσιμα στη διεύθυνση:

<http://forumgeom.fau.edu/>

[27]] S.R. GARDNER: *A Variety of Proofs of the Steiner-Lehmus Theorem*. (2013). Electronic The-
ses and Dissertations. Paper 1169.

Η εργασία είναι διαθέσιμη στη διεύθυνση:

<http://dc.etsu.edu/etd/1169>

[28]] Κ. ΔΟΡΤΣΙΟΣ & Γ. ΤΣΙΝΤΣΙΦΑΣ: *Γενίκευση του θεωρήματος Steiner-Lehmus*. Πρακτικά 10ης Μαθηματικής Εβδομάδας, 214-224. Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Κεντρικής Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη, (2018).

[29]] ΘΩΜΑΪΔΗΣ, Γ.: *Η ανισότητα Erdős-Mordell. Εβδομήντα χρόνια εικασιών, αποδείξεων και γενικεύσεων*. Απολλώνιος 5, 156-171. Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Ημαθίας, Βέροια, (2007).

Τα τεύχη του περιοδικού είναι διαθέσιμα στη διεύθυνση:

<http://www.emeimathias.gr/magazine-apollonios/>

ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΘΩΜΑΪΔΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Θεσσαλονίκης, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΜΑΓΚΟΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Θεσσαλονίκης, Πειραματικό Γυμνάσιο Πανεπιστημίου Μακεδονίας
ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΜΑΥΡΟΓΙΑΝΝΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Αθηνών, Σύμβουλος Α΄ στο Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΜΟΥΡΟΤΚΟΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Chicago, Μουσικό Σχολείο Αγρινίου

ΣΙΛΟΥΑΝΟΣ ΜΠΡΑΖΙΤΙΚΟΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Αθηνών, Postdoctoral Fellow, University of Edinburgh

ΜΙΧΑΗΛ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΑΚΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. California, Los Angeles, Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών & Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Παν. Κρήτης

ΣΤΑΥΡΟΣ ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Κρήτης, Ιδιωτική Εκπαίδευση, Χαλκίδα

ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΣΤΥΝΕΦΑΚΟΠΟΥΛΟΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Cornell, Εκπαιδευτήρια Ράπτου, Λάρισα

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΧΕΛΙΩΤΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Stanford, Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Παν. Αθηνών

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΧΡΙΣΤΟΦΙΔΗΣ, Δρ Μαθηματικών Παν. Cambridge, Assistant Professor in Mathematics, UCLan Cyprus