Εκθέτης
Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας
ΦΥΛΛΟ 18, 27 ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΥ 2017

ISSN 2241-3367
Εκδίδεται στην Αθήνα.
Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος:
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το LATEX 2ε
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Μαθηματικός, MSc, PhD
Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

mavrogiannis@gmail.com

Μια μελέτη για το φαινόμενο της ασκησιολογίας: Η ανεξέλεγκτη δημιουργία ασκήσεων.

Γιάννης Θωμαΐδης – Χρήστος Κυριαζής

1 Εισαγωγή

Η ανεξέλεγκτη δημιουργία ασκήσεων αποτελεί ένα ενδημικό φαινόμενο της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης που συνδέεται στενά με τις ιδιόμορφες διαδικασίες παραγωγής των θεμάτων στις πανελλαδικές εξετάσεις. Αρκετές φορές οι θεματοδότες των εξετάσεων, στην αγωνιώδη και ολονύκτια προσπάθεια επινόησης «πρωτότυπων» θεμάτων, καταφεύγουν εκτός των ορίων της διδακτέας – εξεταστέας ύλης (π.χ. στις υπερβολικές ή αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις, τη σχέση των παραγώγων δύο αντίστροφων συναρτήσεων, τις διαφορικές ή ολοκληρωτικές εξισώσεις, κ.ο.κ.) προκειμένου να αντλήσουν ιδέες και να διαμορφώσουν κατάλληλα ερωτήματα. Στη συνέχεια επανέρχονται στη «νομιμότητα» φροντίζοντας βέβαια να απαλείψουν από τη διατύπωση του θέματος κάθε ίχνος της διαδικασίας που οδήγησε σε αυτό. Στη διάρκεια αυτής της «μετάβασης» και «επιστροφής» συμβαίνουν όμως «ατυχήματα» με τραγελαφικά, ορισμένες φορές, αποτελέσματα[1].

Το φαινόμενο έχει μεν ως αφετηρία στις εξετάσεις, αλλά παρατηρείται επίσης στα σχολικά βιβλία και επαναλαμβάνεται με ιδιαίτερη συχνότητα σε διάφορα εξωσχολικά «βοηθήματα».

Στην εργασία αυτή δεν θα ασχοληθούμε με τα θέματα των εξετάσεων, αλλά θα μελετήσουμε μια ειδική περίπτωση «ανεξέλεγκτης δημιουργίας» που εμφανίστηκε στο βιβλίο Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Επειδή η οριστική διευθέτηση του ζητήματος έγινε σταδιακά και απαίτησε χρονικό διάστημα τετραετίας, αποφασίσαμε να δώσουμε στην παρουσίαση τη δομή μιας «θεατρικής παράστασης» σε τρεις πράξεις[2]

2 Πράξη Πρώτη

Στην 1η έκδοση του βιβλίου Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου (1999) υπήρχε στην ενότητα 2.3 (Κανόνες Παραγώγισης) η ακόλουθη άσκηση (η 11 της Β Ομάδας):

> Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει
>
> $$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \ (1).$$
>
> i) Να βρείτε την $f'(0)$.
> ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.[3]

Στο τεύχος με τις λύσεις των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου υπήρχε (και εξακολουθεί να υφίσταται μέχρι σήμερα) η ακόλουθη απάντηση για το ερώτημα i):

> Έχουμε διαδοχικά
>
> $$\begin{aligned} (f(\eta\mu x))' &= (e^x\sigma\upsilon\nu x)' \\ f'(\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x &= e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x(-\eta\mu x) \\ f'(\eta\mu x)\cdot\sigma\upsilon\nu x &= e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x). \end{aligned}$$
>
> Επομένως
>
> $$f'(\eta\mu 0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0 = e^0(\sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0),$$
>
> οπότε $f'(0) = 1$.

ΣΧΟΛΙΟ 1: Το πρώτο στοιχείο που προκαλεί εντύπωση πριν ακόμη εμβαθύνουμε στη μελέτη της άσκησης είναι ότι δεν ζητείται η εύρεση μιας συνάρτησης f που ικανοποιεί την ισότητα (1), όπως γίνεται σε παρόμοιες ασκήσεις του βιβλίου στη σύνθεση των συναρτήσεων (π.χ. στην άσκηση 6 της ενότητας 1.2). Με αμιγώς ασκησιολογικά κριτήρια αυτό φαίνεται περίεργο, εκτός αν υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f που επαληθεύουν την (1) δεν ανήκουν στη διδακτέα ύλη.

ΣΧΟΛΙΟ 2: Η σύνθεση $f \circ g$ δύο συναρτήσεων f και g με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα είναι αδύνατο να οριστεί, αν δεν εξασφαλίζεται από τα δεδομένα ότι:

[1] Για ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα παραπέμπουμε στις εργασίες [1] και [2] των βιβλιογραφικών παραπομπών στο τέλος της εργασίας.

[2] Δεν είναι άσχετο με αυτή την επιλογή το ακόλουθο χαρακτηριστικό γεγονός: Όταν ο ένας εκ των συγγραφέων παρουσίασε πριν από χρόνια, σε ένα διεθνές συνέδριο Διδακτικής των Μαθηματικών, τον τρόπο δημιουργίας «πρωτότυπων» θεμάτων στις εισαγωγικές εξετάσεις των Α.Ε.Ι. (η παρουσίαση αφορούσε κυρίως τις δεκαετίες 1960 και 1970, όταν κυριαρχούσε στην Ελλάδα η ασκησιολογία των «απολύτων τιμών»), ορισμένοι ξένοι σύνεδροι χαρακτήρισαν το φαινόμενο ως «θέατρο του παραλόγου».

[3] Είναι γνωστό στους παλαιότερους ότι το βιβλίο της Θετικής Κατεύθυνσης που εκδόθηκε το 1999 δεν ήταν νέο, αλλά δημιουργήθηκε με αναπροσαρμογή και εμπλουτισμό του βιβλίου Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου 2ης και 4ης Δέσμης το οποίο είχε χρησιμοποιηθεί την περίοδο 1993-1998. Σε εκείνο το βιβλίο δεν υπήρχε η συγκεκριμένη άσκηση

α) Το σύνολο

$$A' = \{x/x \in B \text{ και } g(x) \in A\}$$

δεν είναι κενό (δηλαδή υφίσταται πεδίο ορισμού της σύνθεσης των δύο συναρτήσεων)

β) Η f εξακολουθεί να ορίζεται ως μονότιμη συνάρτηση στο σύνολο τιμών $g(B)$ της συνάρτησης g.

Το γεγονός ότι η $g(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $x_1 \neq x_2$ με $\eta\mu x_1 = \eta\mu x_2$ για τους οποίους ισχύει

$$f(\eta\mu x_1) \neq f(\eta\mu x_2).$$

Αυτό ακριβώς συμβαίνει σύμφωνα με την ισότητα (1), επειδή για $x = 0$ και $x = \pi$ έχουμε:

$$f(\eta\mu 0) = e^0 \sigma\upsilon\nu 0 = 1$$

δηλαδή $f(0) = 1$ και

$$f(\eta\mu\pi) = e^\pi \sigma\upsilon\nu\pi = -e^\pi$$

δηλαδή $f(0) = -e^\pi$.

Επειδή βέβαια η δοθείσα συνάρτηση f υποτίθεται μονότιμη, το αποτέλεσμα αυτό είναι άτοπο και δείχνει ότι η ισότητα (1) δεν μπορεί να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπως ισχυρίζονται οι δημιουργοί της άσκησης.

Σχολιο 3: Ύστερα από το προηγούμενο σχόλιο, η επίλυση της άσκησης στο τεύχος των λύσεων μας οδηγεί το ακόλουθο ερώτημα:

Αφού δεν είναι γνωστό το πεδίο ορισμού της ισότητας (1) (δηλαδή της σύνθεσης των δύο συναρτήσεων), πώς μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει η (1) θα είναι οπωσδήποτε παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του συνόλου τιμών $[-1, 1]$ της συνάρτησης $g(x) = \eta\mu x$, έτσι ώστε να είναι εφαρμόσιμο το θεώρημα της παραγώγισης των σύνθετων συναρτήσεων;

Στην ενότητα 2.3 του σχολικού βιβλίου, το θεώρημα αυτό διατυπώνεται ως εξής:

> Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει
>
> $$(fog)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Συνεπώς στην εκφώνηση της άσκησης πρέπει να δίνεται όχι μόνο το διάστημα του *πεδίου ορισμού* της $g(x) = \eta\mu x$ στο οποίο η $f \circ g$ ορίζεται ως μονότιμη συνάρτηση, αλλά και το διάστημα του *συνόλου τιμών* της g στο οποίο η f είναι παραγωγίσιμη.

3 Πράξη Δεύτερη

Στην 2η έκδοση του βιβλίου (2000), η ισότητα (1) αντικαταστάθηκε από την

$$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x, \text{ για κάθε } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Αυτή η διόρθωση αποκαθιστά το πρόβλημα που εντοπίσαμε στο σχόλιο 2 (επειδή στο συγκεκριμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ η $g(x) = \eta\mu x$ είναι συνάρτηση $1-1$) αλλά παραμένει αναπάντητο το ερώτημα που διατυπώσαμε στο σχόλιο 3 σχετικά με την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης f. Όπως είδαμε, στη λύση της άσκησης η εφαρμογή του θεωρήματος της παραγώγισης των σύνθετων συναρτήσεων οδηγεί στην ισότητα

$$f'(\eta\mu x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x) \quad (2)$$

Αν θέσουμε σε αυτήν διαδοχικά $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$ βρίσκουμε ότι

$$f'(-1) \cdot 0 = e^{-\frac{\pi}{2}}(0 - (-1)) \Rightarrow e^{-\frac{\pi}{2}} = 0$$

και

$$f'(1) \cdot 0 = e^{\frac{\pi}{2}}(0 - 1) \Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Δηλαδή υποθέτοντας την ύπαρξη των τιμών $f'(-1)$ και $f'(1)$ καταλήγουμε σε άτοπο και συνεπώς η ισότητα (2) δεν είναι δυνατόν να ισχύει για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, όπως ισχυρίζονται οι δημιουργοί της άσκησης.

4 Πράξη Τρίτη

Στην 5η έκδοση του βιβλίου (2003), τα δεδομένα της άσκησης άλλαξαν εκ νέου και διατυπώθηκαν ως εξής:

> Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$ για την οποία ισχύει
>
> $$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x \quad \text{για κάθε} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Όπως βλέπουμε, στη δεύτερη αυτή «επιδιόρθωση» πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης έγινε το *ανοικτό* διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, η f έπαψε να είναι μια «αυθαίρετη» παραγωγίσιμη συνάρτηση και έγινε παραγωγίσιμη στο σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$g(x) = \eta\mu x, \ x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Σχολιο 4: Είναι προφανές ότι την τριετία που μεσολάβησε από τη 2η μέχρι την 5η έκδοση του βιβλίου Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου, οι δημιουργοί της άσκησης ασχολήθηκαν πολύ προσεκτικά με τις προϋποθέσεις εφαρμογής του θεωρήματος παραγώγισης σύνθετων συναρτήσεων στην ισότητα (1). Αυτό βέβαια σημαίνει ότι έλαβαν υπόψη ποια μπορεί να είναι η συγκεκριμένη συνάρτηση f

που «συντίθεται» με την $g(x)$ =ημx και οδηγεί στην (1).[4]. Επειδή όμως οι δημιουργοί εξακολούθησαν να διατηρούν γύρω από την f ένα «πέπλο μυστικότητας», είμαστε υποχρεωμένοι να την αποκαλύψουμε.

Η σχέση $f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$ υποδεικνύει ότι πρέπει να εκφράσουμε τις συναρτήσεις του δευτέρου μέλους με χρήση της μεταβλητής $y = \eta\mu x$.

Επειδή ισχύει

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x \geq 0,$$

από την ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ προκύπτει ότι θα είναι

$$\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{1 - \eta\mu^2 x} = \sqrt{1 - y^2}.$$

Επίσης, επειδή στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ η συνάρτηση $y = \eta\mu x$ είναι αντιστρέψιμη, θα ισχύει $x = \eta\mu^{-1} y$ και άρα θα είναι $e^x = e^{\eta\mu^{-1} y}$.

Επομένως ισχύει

$$f(\eta\mu x) = e^x \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow f(y) = e^{\eta\mu^{-1} y} \cdot \sqrt{1 - y^2},$$

οπότε χρησιμοποιώντας το συνήθη συμβολισμό των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση f ως εξής:

$$f(x) = e^{\tau o\xi\eta\mu x} \cdot \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1].$$

Είναι τώρα φανερό ότι η συνάρτηση f, ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, θα είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1, 1)$ και ότι απαιτείται ιδιαίτερος έλεγχος της παραγωγισιμότητας στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου και ιδιότητες των ορίων διαπιστώνουμε ότι ισχύει:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -1^+} \tfrac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \to -1^+} \tfrac{e^{\tau o\xi\eta\mu x}\sqrt{1 - x^2}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \to -1^+} e^{\tau o\xi\eta\mu x} \sqrt{\tfrac{1 - x}{1 + x}} = e^{-\frac{\pi}{2}}(+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

και

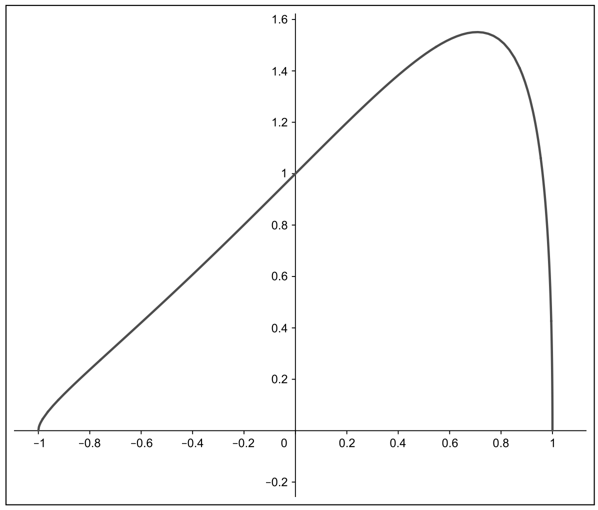
$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 1^-} \tfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \tfrac{e^{\tau o\xi\eta\mu x}\sqrt{1 - x^2}}{x - 1} = \\ &- \lim_{x \to 1^-} e^{\tau o\xi\eta\mu x} \sqrt{\tfrac{1 + x}{1 - x}} = e^{\frac{\pi}{2}}(-\infty) = -\infty \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x = -1$ και $x = 1$.

Στην άσκηση, όπως τελικά διαμορφώθηκε, θα μπορούσαν βέβαια να παίξουν το ρόλο της f και άλλες συναρτήσεις, όπως π.χ. η

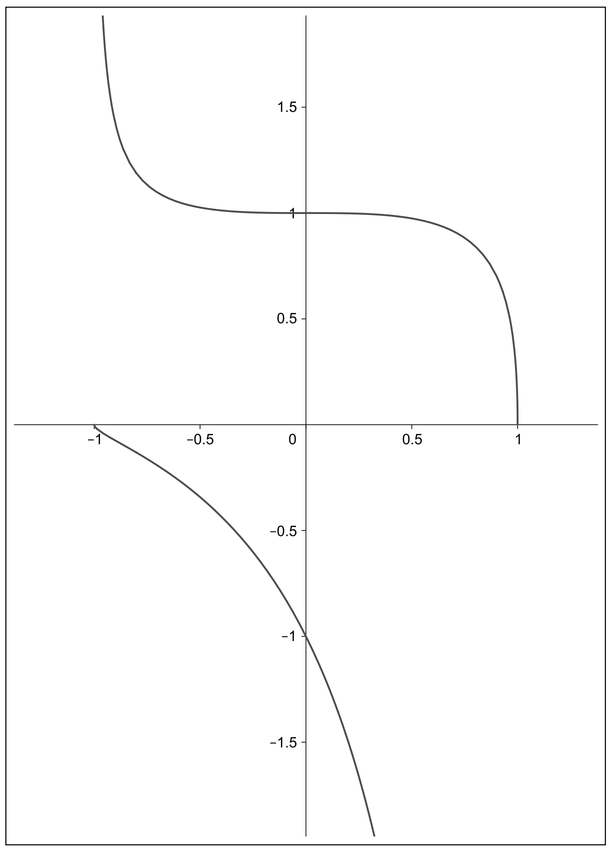
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & x \leq -1 \\ e^{\tau o\xi\eta\mu x} \cdot \sqrt{1 - x^2}, & -1 < x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 1}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Τα προηγούμενα αποσαφηνίζονται εποπτικά στις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν:



Γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = e^{\tau o\xi\eta\mu x}\sqrt{1 - x^2}, \quad \mathrm{x} \in [-1, 1].$$



Γραφική παράσταση των συναρτήσεων

$$h_1(x) = e^{\tau o\xi\eta\mu x}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}, \mathrm{x} \in (-1, 1].$$

και

$$h_2(x) = -e^{\tau o\xi\eta\mu x}\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}, x \in [-1, 1).$$

[4] Ίσως βοήθησαν στο ζήτημα αυτό και οι σχετικές παρατηρήσεις του καθηγητή του Ε.Μ.Π. Γεώργιου Παντελίδη που δημοσιεύτηκαν στο περιοδικό Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί (τεύχος 10, Απρίλιος 2003, ς.11)

5 Επίλογος

Ο αναγνώστης που είχε την υπομονή να διαβάσει αυτή την εργασία θα μπορούσε δικαιολογημένα να θέσει το ερώτημα: Ποιος είναι ο λόγος επαναφοράς αυτού του ζητήματος, το οποίο άλλωστε έχει «τακτοποιηθεί» εδώ και αρκετά χρόνια· Πράγματι, σε μια πρώτη ανάγνωση, που εστιάζει αναγκαστικά στο τεχνικό μέρος του ζητήματος, η εργασία δεν φαίνεται να συνεισφέρει κάτι το εξόχως ενδιαφέρον. Θεωρούμε όμως ότι υπάρχει και ένα δεύτερο επίπεδο ανάγνωσης, το οποίο μεταφέρει ορισμένα σημαντικά μηνύματα για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών. Η περιβόητη «ασκησιολογία», ιδιαίτερα όταν λαμβάνει τις διαστάσεις ανεξέλεγκτων «συνθέσεων» όπως αυτή που περιγράψαμε, θέτει στο περιθώριο ουσιαστικές όψεις της μαθηματικής δραστηριότητας χωρίς τις οποίες τα Μαθηματικά εκφυλίζονται σε μια «εργαλειοθήκη» εξυπηρέτησης των εξεταστικών μηχανισμών.

Κάθε απλή, αλλά κριτική ενασχόληση με την αξιολόγηση των γραπτών δοκιμίων στα βαθμολογικά κέντρα των πανελλαδικών εξετάσεων, οδηγεί στο εξής συμπέρασμα: Οι περισσότεροι μαθητές της Γ΄ Λυκείου είναι φορείς μεγάλων παρανοήσεων για τη σημασία των μαθηματικών ορισμών και προτάσεων, τις οποίες φυσικά είναι αδύνατο να θεραπεύσει ή να κρύψει η χορήγηση γερών δόσεων «μεθοδολογίας» επίλυσης ασκήσεων.[5] Η συστηματική, ποσοτική και ποιοτική, ανάλυση των γραπτών τα τελευταία χρόνια, καθώς και το μέγεθος των δειγμάτων από τα οποία εξάγονται τα σχετικά αποτελέσματα, στέλνουν πολλά αρνητικά μηνύματα για την ποιότητα της διδασκαλίας των Μαθηματικών που λαμβάνουν οι μαθητές καθώς προετοιμάζονται για τις πανελλαδικές εξετάσεις[6].

Η διδασκαλία και μάθηση των θεωρητικών μαθηματικών εννοιών (και ιδιαίτερα της Ανάλυσης) είναι εξαιρετικά πολυσύνθετο και χρονοβόρο εγχείρημα που δεν είναι δυνατό να εκφυλίζεται, μέσω των εξετάσεων, σε ζήτημα απομνημόνευσης και μηχανιστικής αναπαραγωγής.

Θεωρούμε ότι δεν υπάρχει καλύτερη απόδειξη αυτού του τελευταίου ισχυρισμού από το γεγονός ότι χρειάστηκαν τέσσερα χρόνια και δύο διορθωτικές παρεμβάσεις για να αποκατασταθούν τα σφάλματα μιας άσκησης του σχολικού βιβλίου, που αφορούσε τον ορισμό και μια ιδιότητα της σύνθεσης των συναρτήσεων!

Βιβλιογραφικές παραπομπές

1 Γ. Θωμαΐδης: Μαθηματικά & Εξετάσεις. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2009.

2 Γ. Θωμαΐδης & Δ. Μπαρούτης: *Μπορούν τα θέματα των Εξετάσεων να συμβάλλουν στη διδασκαλία της Ανάλυσης στη Γ΄ Λυκείου· Προβληματισμοί και προτάσεις.*
Εισήγηση στην 3η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί (Θεσσαλονίκη 13 Απριλίου 2013).[7]

3 Γ. Θωμαΐδης, Δ. Μπαρούτης, & Γ. Σαράφης: *Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών: Επιλογή των θεμάτων, επιδόσεις των μαθητών και επιπτώσεις στη διδασκαλία.*
Πρακτικά 32ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 368379. Ε.Μ.Ε., Καστοριά, 2015.

4 Γ. Θωμαΐδης, Δ. Μπαρούτης, Γ. Σαράφης, & Α. Συγκελάκης: *Η διδασκαλία της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου: Είναι δυνατό να συνδυάσουμε θεωρητική εμβάθυνση και «μεθοδολογία»; Μέρος 1ο. Μια ανάλυση του προβλήματος. Μέρος 2ο. Μια διδακτική πρόταση.*
Πρακτικά 33ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 261269 & 270281. Ε.Μ.Ε., Χανιά, 2016.

[5] Για μια επισκόπηση πρόσφατων σχετικών ερευνών παραπέμπουμε στις εργασίες [3] και [4] των βιβλιογραφικών παραπομπών.

[6] Για μια επισκόπηση πρόσφατων σχετικών ερευνών παραπέμπουμε στις εργασίες [3] και [4] των βιβλιογραφικών παραπομπών.

[7] Διαθέσιμο στο δικτυακό τόπο: `http://www.kalamari.gr/index.php/upcoming-events/workshops/math-workshop/118-3`