ISSN 2241-3367
Εκδίδεται στην Αθήνα.
Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος:
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το LaTeX 2ε
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Μαθηματικός, MSc, PhD
Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εκθέτης
Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας

ΦΥΛΛΟ 17, 17 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2017

Σύνολο τιμών συνάρτησης. Η εύρεση και η σημασία του.

Βαγγέλης Μουρούκος, Μπάμπης Στεργίου

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό επιχειρούμε να εντοπίσουμε, να καταγράψουμε και να περιγράψουμε με σχετικά σύντομο τρόπο την έννοια, την σημασία, τον τρόπο εύρεσης και τις εφαρμογές του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης, καθώς και ορισμένες περιπτώσεις που κατά την πορεία της εύρεσής του παρατηρούνται συχνά λάθη ή παραλείψεις.

1 Ο ορισμός του συνόλου τιμών.

Ας πάρουμε από το σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών της Γ΄Λυκείου το παρακάτω ερώτημα με την απάντησή του:

ΕΡΩΤΗΜΑ

Τι λέμε σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το σύνολο A;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Σύνολο τιμών της f λέμε το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$. Είναι δηλαδή:

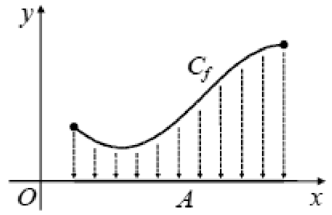
$$f(A) = \{y | y = f(x) \quad \text{για κάποιο} \quad x \in A\}$$

ή ακόμα:

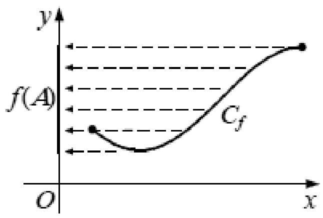
$$f(A) = \{\, f(x) | x \in A \,\}.$$

Το σύνολο τιμών της f στο A συμβολίζεται με $f(A)$. Το σύνολο τιμών υπάρχει για κάθε συνάρτηση, είτε γνωρίζουμε τον τύπο της είτε όχι και συχνά η εύρεσή του είναι πολύ δύσκολη έως αδύνατη.

ΣΧΟΛΙΟ 1 Όταν δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f, τότε:
(α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο A των τετμημένων των σημείων της C_f.
(β) Το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $f(A)$ των τεταγμένων των σημείων της C_f.



(α)



(β)

Εδώ θεωρούμε συμβατικά ότι αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σχεδιάζεται ως συνεχής γραμμή σε ένα διάστημα, τότε οι προβολές των σημείων της στον άξονα $y'y$ δημιουργούν επίσης διάστημα ή μονοσύνολο (αν η συνάρτηση είναι σταθερή). Το γεγονός ότι η γραφική παράσταση σχεδιάζεται με τρόπο ώστε σε κάποιο διάστημα να φαίνεται συνεχής είναι βέβαια αποτέλεσμα αυστηρής θεωρητικής μελέτης, που κυρίως βασίζεται στην έννοια του ορίου και η οποία με τη σειρά της βασίζεται στις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

Για τις γνωστές συναρτήσεις λοιπόν, η γραφική παράσταση δηλώνει αυτό που στην πραγματικότητα είναι η συνάρτηση: συνεχής, μονότονη κλπ. Με άλλα λόγια **η γραφική παράσταση είναι μια μαθηματική πρόταση που εκφράζεται με εικόνα**. Επομένως, ένας μαθητής που στο ερώτημα: «Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \ln x$» σχεδιάσει τη γραφική παράσταση και απαντήσει ότι είναι το $\mathbb{R}$, εξηγώντας ίσως τον τρόπο με τον οποίο το συνάγει αυτό, δηλαδή από την προβολή της γραφικής παράστασης στον άξονα $y'y$, έχει στην πραγματικότητα απαντήσει πλήρως. Δεν κάνει μεν θεωρητική απόδειξη, απαντάει όμως σωστά με βάση τις θεωρητικές γνώσεις του για τη συνάρτηση αυτή.

Για τον λόγο αυτό, η εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης με γραφικό και εποπτικό τρόπο, μέσω δηλαδή της γραφικής της παράστασης, είναι σε πρώτο βήμα απλή συνέπεια μιας προσεκτικής παρατήρησης. Πιο συγκεκριμένα, για να βρούμε το σύνολο τιμών, αρκεί να προβάλλουμε τη γραφική παράσταση στον άξονα $y'y$ και να εντοπίσουμε τα διαστήματα (ή τα σύνολα) που δημιουργούνται από τις προβολές των σημείων της. Ωστόσο, η πιο αυστηρή εύρεση του συνόλου τιμών μας συνάρτησης, απαιτεί άλλοτε σημαντικές αλγεβρικές τεχνικές και άλλοτε γνώσεις από τη συνέχεια και τη μονοτονία της συνάρτησης.

2 Η σημασία του συνόλου τιμών

Πριν προχωρήσουμε στην ανάπτυξη των κυριότερων τρόπων εύρεσης του συνόλου τιμών μας συνάρτησης, ας δούμε ορισμένες από τις χρήσεις του και τις σημαντικότερες από τις πληροφορίες που μας δίνει.

Το σύνολο τιμών $f(A)$ μιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού A, ή ακόμα η εικόνα $f(A)$ ενός συνόλου A μέσω μιας συνάρτησης f, δίνει σημαντικές πληροφορίες για τη συνάρτηση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 Αν $f(A) = (0, 1)$ τότε συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι θετική, ότι η γραφική της δηλαδή παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$, καθώς και ότι ισχύει $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in A$. Από τη μορφή επίσης του συνόλου τιμών προκύπτει ότι η συνάρτηση f δεν έχει μέγιστο ή ελάχιστο, είναι όμως φραγμένη στο A.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 Αν $f(A) = (0, 1]$, τότε εκτός από το γεγονός ότι πάλι η f είναι θετική, εδώ έχουμε την επιπλέον πληροφορία ότι η f έχει μέγιστο το $f_{\max} = 1$, δεν έχει όμως ελάχιστο, αφού το αριστερό άκρο του διαστήματος $f(A) = (0, 1]$ είναι ανοικτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 Αν $f(A) = (-2, 2)$, τότε εκτός από το γεγονός ότι $-2 < f(x) < 2$ για κάθε $x \in A$, συμπεραίνουμε ότι οι εξισώσεις

$$f(x) = 0\ ,\ f(x) = -1\ ,\ f(x) = 1$$

και γενικά κάθε εξίσωση της μορφής

$$f(x) = \beta \ \text{ με } \ \beta \in (-2, 2)$$

έχει μία τουλάχιστον λύση στο σύνολο Α. Ας αναφέρουμε προκαταβολικά ότι στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η λύση αυτή είναι μοναδική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 Το σύνολο τιμών μιας $1-1$ συνάρτησης f είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}. Επίσης, το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το πεδίο ορισμού της f.

Αν το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα Δ είναι υποσύνολο ενός πεπερασμένου συνόλου ή ενός άπειρου συνόλου που αποτελείται από μεμονωμένα σημεία, τότε η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή στο διάστημα Δ. Τονίζουμε επίσης ότι συνεχείς συναρτήσεις με τιμές μόνο ρητούς αριθμούς ή μόνο άρρητους αριθμούς, είναι αναγκαστικά σταθερές. Γενικότερα ισχύει ότι:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 Αν η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f δεν είναι διάστημα, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

Εφαρμογές αυτού του σημαντικού συμπεράσματος θα δούμε στην αντίστοιχη παράγραφο.

Προφανώς, μια συνάρτηση μπορεί να είναι σταθερή και σε περιπτώσεις που δεν εμπίπτουν στις παραπάνω. Η παράγωγος μιας συνάρτησης σε ένα διάστημα έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής. Το σύνολο τιμών, λοιπόν, της παραγώγου f' σε ένα διάστημα Δ είναι επίσης διάστημα. Πρόκειται για το περίφημο θεώρημα Darboux, το οποίο όμως ξεφεύγει από τη σχολική ύλη.

- Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ δεν είναι διάστημα, τότε η f δεν έχει αρχική στο Δ. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα σημαντική πληροφορία που δίνει το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης.

- Αν το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f είναι ένωση ξένων διαστημάτων και το μικρότερο ή το μεγαλύτερο από τα άκρα των διαστημάτων αυτών είναι κλειστό, τότε το άκρο αυτό είναι ολικό ακρότατο της f. Συγκεκριμένα, είναι ολικό ελάχιστο, αν το κλειστό άκρο είναι το μικρότερο και ολικό μέγιστο, αν είναι το μεγαλύτερο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1 Τι συμπεραίνετε για το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$, αν αυτή έχει την ιδιότητα

$$(f(x) - 1)(f(x) - 2) = 0$$

για κάθε $x \in A$;

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in A$ έχουμε:

$$\begin{gathered}(f(x)-1)(f(x)-2)=0 \Leftrightarrow \\ (f(x)-1=0 \ \text{ ή } \ f(x)-2=0) \Leftrightarrow \\ (f(x)=1 \ \text{ ή } \ f(x)=2)\,.\end{gathered}$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι υποσύνολο του συνόλου $\{1, 2\}$, δηλαδή $f(A) \subseteq \{1, 2\}$. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f μπορεί να είναι: $f(A) = \{1, 2\}$ ή $f(A) = \{1\}$ ή $f(A) = \{2\}$.

Τονίζουμε εδώ ότι η σχέση

$$(f(x) - 1)(f(x) - 2) = 0$$

δεν δίνει

$$f(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in A \text{ ή } f(x) = 2 \text{ για κάθε } x \in A.$$

Με άλλα λόγια, από τη σχέση $(f(x) - 1)(f(x) - 2) = 0$ και χωρίς άλλες πληροφορίες (π.χ. τη συνέχεια) δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης f.

3 Ένα βασικό ερώτημα.

Ας ξεκινήσουμε με ένα βασικό ερώτημα, που είναι το κλειδί για την εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης.

ΕΡΩΤΗΜΑ

Πότε ο αριθμός β ανήκει στο σύνολο τιμών $f(A)$ μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

- Ο αριθμός β ανήκει στο σύνολο τιμών $f(A)$ μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$, όταν υπάρχει $\alpha \in$ A τέτοιο, ώστε $f(\alpha) = \beta$.
- Αν έχουμε τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, τότε ο αριθμός β ανήκει στο σύνολο τιμών της, αν η ευθεία $y = \beta$ τέμνει τη γραφική παράσταση σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Έτσι, κάθε φορά που πρόκειται να αποφανθούμε αν ένας αριθμός ανήκει ή όχι στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f, ανατρέχουμε στην παραπάνω βασική και άμεση συνέπεια του ορισμού του συνόλου τιμών.

Ανάλογα εργαζόμαστε βέβαια, αν έχουμε τη γραφική της παράσταση, οπότε η απάντηση βασίζεται στην γεωμετρική - εποπτική ερμηνεία του συνόλου τιμών.

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, προκύπτει ότι:

ΜΕΘΟΔΟΣ 1 Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ αποτελείται από εκείνα και μόνον τα $y \in \mathbb{R}$, για τα οποία υπάρχει ένα τουλάχιστον $x \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

Με άλλα λόγια:

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ αποτελείται από εκείνα τα $y \in \mathbb{R}$, για τα οποία η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον λύση, η οποία όμως πρέπει να ανήκει στο πεδίο ορισμού A.

Για να βρούμε λοιπόν το σύνολο τιμών της f θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$ και θέτουμε για το y όλους τους περιορισμούς, ώστε η εξίσωση αυτή να έχει λύση στο σύνολο A. Επισημαίνουμε ότι δεν αρκεί η εξίσωση $f(x) = y$ να έχει λύση στο $\mathbb{R}$, αλλά πρέπει η λύση αυτή να ανήκει στο A.

Πριν προχωρήσουμε σε εφαρμογές που δείχνουν τον τρόπο εύρεσης του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης, ας δούμε όχι πώς βρίσκουμε αλλά πώς αποδεικνύουμε ότι μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το σύνολο B.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2 Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$$f((f(x)) = 4x - 3$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδειχθεί ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Έστω $\beta \in \mathbb{R}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(\alpha) = \beta$. Η πρώτη προσπάθεια είναι να βρούμε εκείνο το x_0, για το οποίο είναι $4x_0 - 3 = \beta$. Λύνουμε ως προς x_0 και βρίσκουμε εύκολα ότι $x_0 = \dfrac{\beta + 3}{4}$. Στη σχέση $f((f(x)) = 4x - 3$ θέτουμε όπου x το $x_0 = \dfrac{\beta + 3}{4}$ και παίρνουμε:

$$f(f(x_0)) = 4x_0 - 3 \Leftrightarrow$$

$$f\left(f\left(\frac{3+\beta}{4}\right)\right) = 4 \cdot \frac{3+\beta}{4} - 3 \Leftrightarrow$$

$$f\left(f\left(\frac{3+\beta}{4}\right)\right) = \beta.$$

Θέτουμε λοιπόν $\alpha = f\left(\dfrac{3+\beta}{4}\right)$ και καταλήγουμε στη σχέση $f(\alpha) = \beta$. Άρα η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ΜΕΘΟΔΟΣ 2 Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το σύνολο B, εργαζόμαστε ως εξής:

- Αποδεικνύουμε πρώτα ότι $f(x) \in B$ για κάθε $x \in A$.
- Αποδεικνύουμε στη συνέχεια ότι για κάθε $\beta \in B$ υπάρχει $\alpha \in$ A, τέτοιο ώστε $f(\alpha) = \beta$.

ΣΠΟΥΔΑΙΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Θα περίμενε κανείς ότι η δεύτερη συνθήκη, δηλαδή ότι για κάθε $\beta \in B$ υπάρχει $\alpha \in$ A τέτοιο, ώστε $f(\alpha) = \beta$, θα αρκούσε από μόνη της για να συμπεράνουμε ότι $f(A) = B$. Όμως στην πραγματικότητα αυτό που αποδεικνύει η συνθήκη αυτή είναι ότι κάθε στοιχείο $\beta \in$ B ανήκει στο σύνολο τιμών $f(A)$ της f, δηλαδή ότι B $\subseteq f(A)$. Έχοντας όμως και την πρώτη συνθήκη, ότι δηλαδή $f(x) \in B$ για κάθε $x \in A$, εξασφαλίζουμε ότι $f(A) \subseteq$ B, οπότε τελικά θα είναι $f(A) = B$.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $B = (0\,, +\infty)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Αρκεί επομένως να «αποδείξουμε» ότι για κάθε $\beta > 0$ υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ με $f(\alpha) = \beta$. Όμως $f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow e^\alpha - 1 = \beta \Leftrightarrow \alpha = \ln(\beta + 1)$. Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Είναι προφανές όμως ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $(-1, +\infty)$. Το λάθος έγκειται στο ότι πρέπει να αποδείξουμε επιπλέον ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, κάτι που όμως δεν ισχύει (για παράδειγμα, είναι $f(-1) = e^{-1} - 1 < 0$).

4 Η εύρεση του συνόλου τιμών - Βασικές εφαρμογές

4.1 Εύρεση από τον ορισμό

Ας ξεκινήσουμε την εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης με χρήση μόνο του ορισμού και των βασικών εργαλείων της άλγεβρας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - 2x - 5.$$

ΛΥΣΗ

Πρόκειται για τελείως απλή εφαρμογή, η οποία όμως δείχνει το σκεπτικό για την εύρεση του συνόλου τιμών με καθαρά αλγεβρικό τρόπο που βασίζεται στον ορισμό και μόνο.

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ αποτελείται από εκείνα και μόνον τα $y \in \mathbb{R}$, για τα οποία η εξίσωση $f(x) = y$ έχει λύση στο πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R}$ της f. Είναι:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = y \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 - y = 0.$$

Η εξίσωση αυτή, ως εξίσωση 2ου βαθμού, έχει λύση αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4 + 4(5 + y) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -6.$$

Προφανώς, οι λύσεις της εξίσωσης αυτής ανήκουν στο πεδίο ορισμού $\mathbb{R}$ της f. Άρα το σύνολο τιμών της δοσμένης συνάρτησης είναι το $f(\mathbb{R}) = [-6, +\infty)$.
Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν φέρουμε την f στη μορφή $f(x) = (x - 1)^2 - 6$.

Ας δούμε τώρα ένα παρόμοιο παράδειγμα με αλλαγμένο το πεδίο ορισμού:

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = x^2 - 2x - 5$$

με πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{1\}$.

ΛΥΣΗ

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ αποτελείται από εκείνα και μόνον τα $y \in \mathbb{R}$, για τα οποία η εξίσωση $f(x) = y$ έχει λύση στο πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{1\}$ της f. Είναι:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = y \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 - y = 0 \ \ (1).$$

Η εξίσωση αυτή, ως εξίσωση 2ου βαθμού, έχει λύση αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4 + 4(5 + y) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -6.$$

Επειδή το πεδίο ορισμού δεν είναι το $\mathbb{R}$, πρέπει επιπλέον να εξετάσουμε αν για αυτά τα y μία τουλάχιστον λύση της εξίσωσης (1) ανήκει στο πεδίο ορισμού $A = \mathbb{R} - \{1\}$ της f. Ας δούμε όμως πρώτα μήπως υπάρχει $y \geq -6$, για το οποίο η εξίσωση (1) έχει λύση την $x = 1$. Για $x = 1$ η (1) δίνει $y = -6$. Δεν είμαστε όμως ακόμα έτοιμοι για να απορρίψουμε την τιμή αυτή. Πρέπει να εξετάσουμε την συμπεριφορά της εξίσωσης $y = f(x)$ για $y = -6$, διότι αυτή είναι τελικά η πιο ... αρμόδια σχέση για να αποφασίσει αν θα δεχτούμε ή αν θα εξαιρέσουμε κάποια τιμή από το σύνολο τιμών. Αλλά για $y = -6$ η (1) γίνεται:

$$x^2 - 2x - 5 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 1 \notin A = \mathbb{R} - \{1\}.$$

Άρα το σύνολο τιμών της δοσμένης συνάρτησης είναι το $f(A) = (-6, +\infty)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1 Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x - 5$, με $x \neq 2$. Όπως παραπάνω, έχουμε ότι:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 = y \Leftrightarrow x^2 - 2x - 5 - y = 0 \quad (1).$$

Πρέπει

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 4 + 4(5 + y) \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -6$$

Η εξίσωση (1) για $x = 2$ (που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού) δίνει $y = -5$. Πιθανόν λοιπόν το $y = -5$ να μην ανήκει στο σύνολο τιμών της f. Αλλά η ίδια εξίσωση για $y = -5$ δίνει:

$$x^2 - 2x - 5 + 5 = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \ \text{ή} \ x = 2)$$

Επειδή $x = 0 \in A$, τελικά το $y = -5$ ανήκει στο σύνολο τιμών και έτσι $f(A) = [-6, +\infty)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

ΛΥΣΗ

Πρέπει

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1,$$

οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{1\}$. Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$. Το σύνολο τιμών της f αποτελείται από όλα εκείνα τα $y \in \mathbb{R}$, για τα οποία η εξίσωση $y = f(x)$ έχει λύση ως προς x στο A. Είναι:

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 - (y + 2)x + 2 + y = 0 \qquad (1)$$

Η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού ως προς x και έχει λύση στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y+2)^2 - 4(2+y) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(y+2)(y-2) \geq 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

Μένει να εξετάσουμε μήπως για κάποιο από τα παραπάνω y η λύση της (1) είναι ο αριθμός 1, ο οποίος δεν ανήκει στο A. Αλλά για $x = 1$ η σχέση (1) δίνει:

$$1 - (y+2) + 2 + y = 0 \Leftrightarrow 1 = 0,$$

η οποία είναι αδύνατη. Επομένως οι παραπάνω τιμές για το y είναι δεκτές και έτσι το σύνολο τιμών της f είναι το $f(A) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ 2 Στην πραγματικότητα πρόβλημα υπάρχει αν και οι δύο λύσεις της εξίσωσης (1) είναι ίσες με 1. Αλλά τότε πρέπει $\Delta = 0$, δηλαδή $y = -2$ ή $y = 2$. Όμως, για τις τιμές αυτές του y η εξίσωση (1) δίνει για το x αντίστοιχα τις τιμές $x = 0$ και $x = 2$ που ανήκουν στο πεδίο ορισμού. Άρα και οι τιμές $y = -2$, $y = 2$ ανήκουν στο σύνολο τιμών της f και έτσι $f() = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}.$$

ΛΥΣΗ

Πρέπει

$$x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1,$$

οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{1\}$. Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$. Το σύνολο τιμών της f αποτελείται από όλα εκείνα τα $y \in \mathbb{R}$, για τα οποία η εξίσωση $y = f(x)$ έχει λύση ως προς x στο A. Είναι:

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 + (1 - y)x + y - 2 = 0 \qquad (1)$$

Η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού ως προς x και έχει λύση στο $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (1 - y)^2 - 4(y - 2) \geq 0 \Leftrightarrow (y - 3)^2 \geq 0,$$

που ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$.
Θα περίμενε κανείς λοιπόν ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$. Πρέπει όμως να εξετάσουμε αν επιπλέον η λύση της (1) ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, δηλαδή αν $x \neq 1$. Με άλλα λόγια, πρέπει να εξετάσουμε μήπως για κάποιο από τα παραπάνω y η λύση της (1) είναι ο αριθμός 1, ο οποίος δεν ανήκει στο A. Αλλά για $x = 1$ η σχέση (1) δίνει:

$$1 + (1 - y) + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 0y = 0,$$

που είναι ταυτότητα ως προς y. Φαίνεται πως οδηγούμαστε σε αδιέξοδο, οπότε επιστρέφουμε στον τύπο της f και παρατηρούμε ότι η τιμή $x = 1$ μηδενίζει και τον αριθμητή. Απλοποιούμε λοιπόν τον τύπο της f και παίρνουμε ότι

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1} = x + 2$$

για $x \neq 1$. Από αυτή τη μορφή παίρνουμε τώρα ότι για $x = 1$ είναι $y = 3$. Η εξίσωση (1) για $y = 3$ γίνεται:

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin A$$

και έτσι οριστικά η τιμή $y = 3$ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f. Άρα $f\,(A) = \mathbb{R} - \{3\}$.

Ας σημειώσουμε ότι αν από την αρχή απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης, τότε η διαδικασία εύρεσης γίνεται πιο απλή, αφού αντί της (1) θα έχουμε εξίσωση 1ου βαθμού.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7 Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι:

$$f(x) = y \Leftrightarrow (x - 1)^3 - 1 = y \Leftrightarrow (x - 1)^3 = y + 1 \Leftrightarrow$$

$$x = \begin{cases} -\sqrt[3]{-(y+1)}, & y < -1 \\ \sqrt[3]{y+1}, & y \geq -1 \end{cases}.$$

Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8 Να βρεθούν οι αριθμοί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + x + 1}$$

να έχει σύνολο τιμών το $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

ΛΥΣΗ

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών της f αποτελείται από όλα εκείνα τα $y \in \mathbb{R}$, για τα οποία η εξίσωση $y = f(x)$ έχει λύση ως προς x στο A. Είναι:

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow$$

$$yx^2 + (y - \alpha)x + y - \beta = 0 \ (1)$$

- Για $y = 0$ η εξίσωση (1) γίνεται $-\alpha x - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta = 0$ που έχει λύση στο $\mathbb{R}$, εκτός από την περίπτωση που $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$. Αφήνουμε όμως για το τέλος την τελική διερεύνηση.

- Αν $y \neq 0$, τότε η εξίσωση (1) είναι δευτέρου βαθμού και έχει λύση αν και μόνο αν:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (y-\alpha)^2 - 4y(y-\beta) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$3y^2 + 2(\alpha - 2\beta) - \alpha^2 \leq 0$$

Η παραπάνω ανίσωση αληθεύει σε ένα διάστημα της μορφής $[y_1, y_2]$ και επειδή θέλουμε το σύνολο τιμών της f να είναι το $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$, θα πρέπει η εξίσωση $3y^2 + 2(\alpha - 2\beta) - \alpha^2 = 0$ να έχει ρίζες τους αριθμούς $y_1 = -\frac{1}{3}$ και $y_2 = 1$. Επειδή λοιπόν πρέπει να είναι $y_1 + y_2 = \frac{2}{3}$ και $y_1 \cdot y_2 = -\frac{1}{3}$, από τους τύπους του Vieta προκύπτει ότι:

$$-\frac{2(\alpha - 2\beta)}{3} = \frac{2}{3} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{-\alpha^2}{3} = -\frac{1}{3}$$

Από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε τελικά ότι $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ ή $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$. Και οι δύο λύσεις είναι δεκτές, αφού και στις δύο περιπτώσεις ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

4.2 Σύνολο τιμών συνεχών συναρτήσεων

Θα ασχοληθούμε τώρα με την εύρεση του συνόλου τιμών σε συναρτήσεις που είναι συνεχείς αλλά δεν μπορεί να εφαρμοστεί ίσως καμία από τις προηγούμενες μεθόδους που περιγράψαμε ή στις οποίες το σύνολο τιμών προσδιορίζεται ευκολότερα μέσω των θεωρημάτων που αφορούν συνεχείς συναρτήσεις. Για τις συναρτήσεις αυτές θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τη σχετική πρόταση από το σχολικό βιβλίο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B), όπου $\mathrm{A} = \lim_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $\mathrm{B} = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$.
Αν, όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A) .

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση, για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f:

- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού A της f.

- Βρίσκουμε με την βοήθεια των παραγώγων ή με άλλο τρόπο τα διαστήματα μονοτονίας Δ_i, $i = 1, 2, \ldots \kappa$ της f, δηλαδή γράφουμε

$$A = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup ... \cup \Delta_\kappa,$$

όπου η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα Δ_i, $i = 1, 2, \ldots \kappa$.

- Βρίσκουμε για κάθε $i = 1, 2, \ldots \kappa$ το "επιμέρους" σύνολο τιμών $f(\Delta_i)$.

- Τελικά το σύνολο τιμών είναι το

$$f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup ... \cup f(\Delta_\kappa).$$

Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ και $0 \in f(\Delta)$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα Δ.

Αντίστοιχα, αν $\beta \in f(\Delta)$, τότε η εξίσωση $f(x) = \beta$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα Δ. Με τον τρόπο αυτό, σε συνδυασμό με τον τρόπο εύρεσης του συνόλου τιμών, βρίσκουμε το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης της μορφής $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ, τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό, δηλαδή η εικόνα $f(\Delta)$, είναι επίσης διάστημα ή μονοσύνολο. Το σύνολο τιμών είναι μονοσύνολο μόνο αν η συνάρτηση είναι σταθερή.

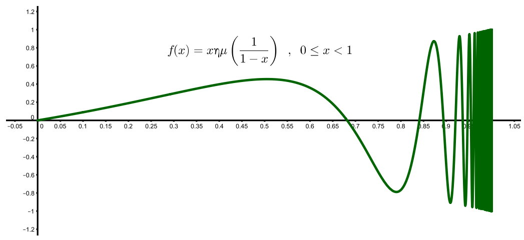
Επιπλέον, για μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα Δ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

- Αν το Δ είναι κλειστό, τότε και το $f(\Delta)$ είναι κλειστό. Αν όμως το $f(\Delta)$ είναι κλειστό, τότε το Δ δεν είναι υποχρεωτικά κλειστό. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ που έχει σύνολο τιμών το $[-1, 1]$, αλλά το πεδίο ορισμού της $A = \mathbb{R}$ είναι ανοικτό διάστημα.

- Αν το $f(\Delta)$ είναι ανοικτό, τότε το Δ ***δεν*** είναι αναγκαστικά ανοικτό. Για παράδειγμα, το σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = x\text{ημ}\left(\frac{1}{1-x}\right) \quad , \quad x \in \Delta = [0, 1)\,,$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται παρακάτω, είναι το $f(\Delta) = (-1, 1)$.



- Αν $m < M$ είναι τα ακρότατα της f στο κλειστό διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$, τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\Delta) = [m, M]$.

- Αν το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ δεν είναι διάστημα, τότε η f είναι σταθερή.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις είναι μέγιστης σημασίας για τους υποψήφιους και αποτελούν συχνά ερωτήματα στις Πανελλήνιες Εξετάσεις.

Τέλος, σημειώνουμε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$,

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\beta^-} f(x) = +\infty$$

ή αντίστροφα, δηλαδή

$$\left\{\lim_{x\to\alpha^+} f(x), \lim_{x\to\beta^-} f(x)\right\} = \{-\infty, +\infty\},$$

τότε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα αυτό είναι το $f(\Delta) = \mathbb{R}$. Αυτό το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος των Ενδιάμεσων Τιμών και της έννοιας του άπειρου ορίου και θεωρούμε πως δεν απαιτείται καμία παραπάνω αιτιολόγησή του από τον μαθητή.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - x - \ln x$.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης
$f(x) = 2017$.
γ) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f και να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > 1 - x$.

ΛΥΣΗ

Πρόκειται αναμφίβολα για την πιο σημαντική εφαρμογή για τον υποψήφιο.
α) Η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $A = (0, +\infty)$.
Επειδή για κάθε $x > 0$ είναι

$$f'(x) = (1 - x - \ln x)' = -1 - \frac{1}{x} < 0,$$

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A.
Επίσης, είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ και άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.
β) Επειδή $2017 \in f(A) = \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = 2017$ έχει μία τουλάχιστον λύση, η οποία όμως είναι και μοναδική, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A.
γ) Στο ερώτημα αυτό απαιτείται κάτι παραπάνω από τα συνηθισμένα. Αρχικά παρατηρούμε ότι δεν χρειάζεται κανένας περιορισμός, αφού η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το $f(A) = \mathbb{R}$. Είναι όμως αυθαιρεσία να πάρουμε τον περιορισμό $1-x > 0$ και να εφαρμόσουμε την f στα δύο μέλη, αλλάζοντας τη φορά της ανισότητας. Ας δούμε λοιπόν βήμα - βήμα τη σωστή πορεία:
i) Αν $1 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, τότε η ανισότητα αληθεύει, αφού το πρώτο μέλος είναι θετικός αριθμός (η f^{-1} έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f, που είναι το $(0, +\infty)$), ενώ το δεύτερο μη θετικός.
ii) Αν $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$, τότε:

$$f^{-1}(x) > 1 - x \Leftrightarrow x < f(1-x) \Leftrightarrow$$

$$x < 1 - (1-x) - \ln(1-x) \Leftrightarrow x < x - \ln(1-x) \Leftrightarrow$$
$$\ln(1-x) < 0 \Leftrightarrow 1 - x < 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Άρα τελικά η ανίσωση αληθεύει για

$$x \in (0,1) \cup [1, +\infty) = (0, +\infty).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ και $f(\Delta) = (\kappa, \lambda)$, τότε θα είναι

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \kappa \ \text{ και } \ \lim_{x\to\beta^-} f(x) = \lambda.$$

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$ και $f(\Delta) = (\kappa, \lambda)$, τότε θα είναι

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \lambda \ \text{ και } \ \lim_{x\to\beta^-} f(x) = \kappa.$$

Σημειώνουμε ότι κάποια ή και όλα από τα α, β ή κ, λ μπορεί να είναι $+\infty$ ή $-\infty$, αρκεί οι συμβολισμοί να προσαρμοστούν κατάλληλα. Στην περίπτωση π.χ. που κάποιο από τα α, β είναι $+\infty$ ή $-\infty$, το αντίστοιχο όριο δεν είναι πια πλευρικό.

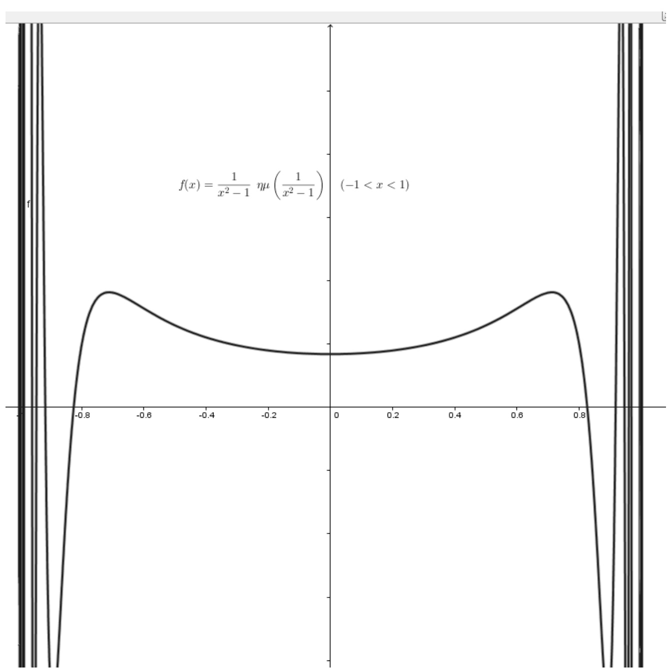
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2 Έστω μία συνεχής συνάρτηση f σε ένα διάστημα $\Delta = (\alpha, \beta)$, που έχει σύνολο τιμών το $f(\Delta) = \mathbb{R}$. Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει υποχρεωτικά ότι

$$\left\{\lim_{x\to\alpha^+} f(x), \lim_{x\to\beta^-} f(x)\right\} = \{-\infty, +\infty\},$$

αφού ενδέχεται τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$ να μην υπάρχουν. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1} \cdot \text{ημ}\left(\frac{1}{x^2-1}\right), \ x \in (-1, 1),$$

της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



4.3 Μονοτονία - Συνέχεια και Σύνολο τιμών

Για τις μονότονες συναρτήσεις ισχύει η εξής πρόταση:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3 Αν μια συνάρτηση f είναι (γνησίως) μονότονη σε ένα διάστημα Δ και το σύνολο τιμών της $f(\Delta)$ είναι διάστημα, τότε η f είναι συνεχής στο Δ.

5 Περιπτώσεις που προβληματίζουν!

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 10 Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x) + f(x) = x + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδειχθεί ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Η πρώτη επιφανειακή προσέγγιση θα μπορούσε να είναι η εξής:

Θεωρούμε τυχαίο $y \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x) = y$. Θέτοντας $f(x) = y$ στη δοσμένη σχέση, παίρνουμε ότι:

$$f^3(x) + f(x) = x + 1 \Leftrightarrow y^3 + y = x + 1 \Leftrightarrow$$

$$x = y^3 + y - 1.$$

Επομένως το σύνολο τιμών είναι το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Η προσέγγιση όμως αυτή έχει σοβαρά κενά. Στην πραγματικότητα αυτό που βρήκαμε με την παραπάνω διαδικασία είναι ότι **αν** υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x) = y$, τότε αυτό το x δίνεται από τη σχέση $x = y^3 + y - 1$. Όμως, κανείς δεν εγγυάται ότι αυτό το x υπάρχει. Για να είναι ολοκληρωμένη η απάντηση, πρέπει να αποδείξουμε ότι $f(x) = y$, δηλαδή ότι $f(y^3 + y - 1) = y$, πράγμα που δεν είναι καθόλου προφανές.

Ας δούμε την (κλασική) αντιμετώπιση αυτού του θέματος. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, αποδεικνύουμε σχεδόν άμεσα ότι η f είναι $1-1$, οπότε αντιστρέφεται. Η πιθανή αντίστροφη της f, όπως έδειξε η παραπάνω διαδικασία, είναι η συνάρτηση $g(x) = x^3 + x - 1$, που είναι $1-1$ (αφού είναι, όπως εύκολα βλέπουμε, γνησίως αύξουσα).

Η δοσμένη σχέση δίνει ότι:

$$g(f(x)) = f^3(x) + f(x) - 1 = x + 1 - 1 = x,$$

δηλαδή $g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε λοιπόν τυχαίο $\beta \in \mathbb{R}$. Αρκεί να βρούμε $\alpha \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(\alpha) = \beta$. Θεωρούμε (όπως είναι φυσιολογικό) τον αριθμό $\alpha = g(\beta)$. Τότε, είναι:

$$\alpha = g(\beta) \Rightarrow g(f(\alpha)) = g(\beta) \overset{g:1-1}{\Rightarrow} f(\alpha) = \beta$$

και το ζητούμενο δείχθηκε.

ΣΧΟΛΙΟ 3 Με την παραπάνω διαδικασία έχουμε βρει και την αντίστροφη της f:

$$f^{-1}(x) = x^3 + x - 1\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

Να τονίσουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση δεν βρίσκεται θέτοντας $f(x) = y$, γιατί δεν μπορούμε να εργαστούμε με ισοδυναμίες. Είναι προτιμότερο να διατυπώσουμε τη λύση ως εξής: Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, η τιμή $f^{-1}(x)$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, μπορούμε να θέσουμε στη δοσμένη σχέση όπου x το $f^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ο παραπάνω τύπος της f^{-1} προκύπτει άμεσα. Χωρίς να έχουμε βρει πρώτα το σύνολο τιμών της f, δηλαδή το πεδίο ορισμού της f^{-1}, δεν έχουμε ορίσει την f^{-1} στο $\mathbb{R}$, αλλά μόνο στο σύνολο τιμών της.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 11 Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα:

$$f^3(x) + f(x) = e^x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδειχθεί ότι η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

Θέτοντας $f(x) = y$, υποψιαζόμαστε ότι η αντίστροφη της f, αν υπάρχει, θα είναι η συνάρτηση

$$g(x) = \ln(x^3 + x)\ ,\ x > 0.$$

Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει ότι $g(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g είναι $1-1$, όπως μπορούμε να δούμε χρησιμοποιώντας τον ορισμό, ή δείχνοντας ότι είναι γνησίως αύξουσα με χρήση της παραγώγου.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι:

$$f^3(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = e^x \Rightarrow f(x) > 0.$$

Έστω τυχαίο $\beta \in (0, +\infty)$. Αρκεί να βρούμε $\alpha \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(\alpha) = \beta$. Θεωρούμε (όπως είναι φυσιολογικό) τον αριθμό $\alpha = g(\beta)$. Τότε, είναι:

$$\alpha = g(\beta) \Rightarrow g(f(\alpha)) = g(\beta) \overset{g:1-1}{\Rightarrow} f(\alpha) = \beta$$

και το ζητούμενο δείχθηκε.

Σημαντική παρατήρηση

Αν παραλείψουμε να αποδείξουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η υπόλοιπη διαδικασία δεν εξασφαλίζει ότι $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, αλλά μόνο ότι $f(\mathbb{R}) \supseteq (0, +\infty)$. Έτσι, μαζί με τη σχέση $f(x) > 0$ που δίνει ότι $f(\mathbb{R}) \subseteq (0, +\infty)$, προκύπτει τελικά ότι $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

Για να γίνει αυτό καλύτερα αντιληπτό, αναφέρουμε ότι με την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι για κάθε $\beta > 1$ υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\alpha) = \beta$. Ωστόσο, το σύνολο τιμών δεν είναι το $(1, +\infty)$ αλλά το $(0, +\infty)$, αφού η σχέση $f(x) > 1$ δεν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μια παράξενη «λύση»

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι:

$$f^3(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x)+1) = e^x \Rightarrow f(x) > 0.$$

Έστω τυχαίο $y > 0$. Αρκεί να βρούμε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(x) = y$. Θέτοντας $f(x) = y$ στη δοσμένη σχέση $f^3(x) + f(x) = e^x$, βρίσκουμε ότι:

$$y^3 + y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y^3 + y)\ ,\ y > 0.$$

Άρα η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.

Η παραπάνω απόπειρα λύσης, όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, έχει σοβαρές παραλείψεις και πρέπει να αποφεύγεται. Για να είναι η παραπάνω πορεία ολοκληρωμένη, πρέπει επιπλέον να αποδείξουμε ότι για την τιμή $x = \ln(y^3 + y)\ ,\ y > 0$, που βρήκαμε ισχύει ότι $f(x) = y$. Αυτό είναι απαραίτητο να γίνει διότι κατά τη διαδικασία εύρεσης τα βήματα δεν είναι ισοδύναμα. Η τιμή που βρήκαμε αφορά μόνο το ένα σκέλος, λείπει όμως το άλλο σκέλος που είναι η ύπαρξη της τιμής αυτής.

Με άλλα λόγια φτάσαμε στην τιμή με την προϋπόθεση ότι αυτή υπάρχει, αλλά η ύπαρξη είναι επίσης εξίσου σημαντικό ζήτημα. Η επαλήθευση επομένως είναι απαραίτητη.

6 Γενικά θέματα

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 12 Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ και ότι $f(0) = 0$.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ότι $f^{-1}(x) = e^x + x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$.
ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.
στ) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\mathrm{A} = \lim_{\mathrm{x}\to+\infty} \mathrm{f(x)} \text{ και } \mathrm{B} = \lim_{\mathrm{x}\to-\infty} \mathrm{f(x)}.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

α) Με χρήση του ορισμού αποδεικνύεται εύκολα ότι η f είναι $1-1$. Για την εύρεση του $f(0)$ θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x + x - 1$, που είναι γνησίως αύξουσα. Είναι

$$g(f(x)) = e^{f(x)} + f(x) - 1 = x,$$

δηλαδή

$$g(f(x)) = x \ \ (1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως:

$$g(f(0)) = 0 = g(0) \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

β) Έστω $x_1 < x_2$. Τότε λόγω της (1) παίρνουμε

$$g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άλλος τρόπος Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$e^{f(x_1)} + f(x_1) \geq e^{f(x_2)} + f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$x_1 + 1 \geq x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2,$$

που είναι άτοπο, αφού $x_1 < x_2$.
γ) Έστω $\beta \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τον αριθμό $\alpha = g(\beta)$ (όπως είναι φυσιολογικό, αφού η g είναι η πιθανή αντίστροφη της f). Τότε, είναι:

$$\alpha = g(\beta) \overset{(1)}{\Rightarrow} g(f(\alpha)) = g(\beta) \Rightarrow f(\alpha) = \beta.$$

Επομένως, η συνάρτηση f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Θέτοντας όπου x το $f^{-1}(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}$, βρίσκουμε ότι

$$f^{-1}(x) = e^x + x - 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f^{-1} = g$.
δ) Είναι

$$f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow e^x + x - 1 = x \Leftrightarrow x = 0,$$

αφού οι εξισώσεις $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες στο σύνολο $\mathbb{R} \cap f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
ε) Έστω τυχαίο, αλλά σταθεροποιημένο, $a \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τυχαίο $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq a$. Με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $h(x) = e^x$ στο διάστημα με άκρα τα $f(a)$ και $f(x)$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi\,(x)$ μεταξύ των $f(a)$ και $f(x)$ τέτοιο, ώστε

$$e^{f(x)} - e^{f(a)} = (f(x) - f(a))e^{\xi(x)}.$$

Έτσι, από τις σχέσεις

$$e^{f(x)} + f(x) = x + 1 \quad \text{και} \quad e^{f(a)} + f(a) = a + 1$$

με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} &e^{f(x)} - e^{f(a)} + f(x) - f(a) = x - a \Leftrightarrow \\ &(f(x) - f(a))e^{\xi(x)} + f(x) - f(a) = x - a \Leftrightarrow \\ &f(x) - f(a) = \frac{x - a}{e^{\xi(x)} + 1}. \end{aligned}$$

Επομένως, είναι

$$|f(x) - f(a)| = \left| \frac{x - a}{e^{\xi(x)} + 1} \right| \leq |x - a|,$$

σχέση που ισχύει και για $x = a$. Από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει τώρα εύκολα ότι η f είναι συνεχής στο a.
Επίσης, για $x \neq a$ είναι

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{e^{\xi(x)+1}}$$

κι επειδή η f είναι συνεχής στο a και ο αριθμός $\xi\,(x)$ βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(x)$ έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to a} \xi\,(x) = f\,(a)$, οπότε

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{1}{e^{\xi(x)}+1} = \frac{1}{e^{f(a)}+1}.$$

Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}+1}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

στ) Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, έχουμε ότι

$$\mathrm{A} = \lim_{\mathrm{x}\to+\infty} \mathrm{f(x)} = +\infty \quad \text{και} \quad \mathrm{B} = \lim_{\mathrm{x}\to-\infty} \mathrm{f(x)} = -\infty.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 13 Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να βρεθεί η τιμή $f(0)$.
β) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη 0.
γ) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ και να βρεθεί το πρόσημο των τιμών της f.
δ) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $f(x) = 3xf'(x) - 2f(x)f'(x)$
ε) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$\int_0^x f\,(t)\,dt = \frac{1}{4}\left[3xf\,(x) - f^2\,(x)\right].$$

στ) Να αποδειχθεί ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και να βρεθεί η f^{-1}.

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$:

$$f^3(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)\left[f^2(0)+1\right] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

β) Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοσμένης σχέσης και παίρνουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{3f^2(x)+1} > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $f'(0) = 1$, η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση

$$(\varepsilon) : y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x.$$

γ) Είναι $f(0) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η $x = 0$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα και $f(0) = 0$ θα ισχύει:

- $x < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow f(x) < 0.$
- $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow f(x) > 0.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	$\nearrow$ −	0	+ $\nearrow$

Άρα:

- για $x \in (0,\ +\infty)$ είναι $f(x) > 0.$
- για $x \in (-\infty,\ 0)$ είναι $f(x) < 0.$

δ) Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης

$$3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 1,$$

με $f(x)$ έχουμε ότι:

$$3f^3(x)f'(x) + f'(x)f(x) = f(x).$$

Επειδή $f^3(x) = x - f(x)$, η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$\left(3x - 3f(x)\right)f'(x) + f(x)f'(x) = f(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = 3xf'(x) - 2f(x)f'(x)\ (1)$$

ε) Από τη σχέση $f'(x) = \dfrac{1}{3f^2(x)+1}$ έχουμε ότι η f' είναι συνεχής. Για $x \in \mathbb{R}$, με ολοκλήρωση της (1) βρίσκουμε ότι:

$$I = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x 3tf'(t)dt - 2\int_0^x f(t)f'(t)dt =$$

$$= \left[3tf(t)\right]_0^x - \int_0^x 3f(t)dt - 2\left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x =$$

$$= 3xf(x) - 3I - f^2(x)$$

αφού $f(0) = 0$ και μια αρχική της $g(t) = f(t)f'(t)$ είναι η $G(t) = \dfrac{f^2(t)}{2}$. Άρα:

$$I + 3I = 3xf(x) - f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$I = \frac{1}{4}\left[3xf(x) - f^2(x)\right].$$

Σχόλιο Μια άλλη προσέγγιση είναι η ακόλουθη: Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση $f^3(x) + f(x) = x$ με $f'(x) \neq 0$ και παίρνουμε:

$$f^3(x)f'(x) + f(x)f'(x) = xf'(x) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f^4(x)}{4}\right)' + \left(\frac{f^2(x)}{2}\right)' + f(x) = [xf(x)]'.$$

Επομένως, είναι:

$$\int_0^x f(t)dt = -\left[\frac{f^4(t)}{4}\right]_0^x - \left[\frac{f^2(t)}{2}\right]_0^x + [tf(t)]_0^x =$$

$$= -\frac{f^4(x)}{4} - \frac{f^2(x)}{2} + xf(x) =$$

$$= -\frac{f^3(x)f(x)}{4} - \frac{f^2(x)}{2} + xf(x) =$$

$$= -\frac{(x - f(x))\, f(x)}{4} - \frac{f^2(x)}{2} + xf(x) =$$

$$= \frac{4xf(x) - xf(x) + f^2(x) - 2f^2(x)}{4} = \frac{3xf(x) - f^2(x)}{4}.$$

στ) Έστω $\beta \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f(\alpha) = \beta$. Θέτουμε $\alpha = \beta^3 + \beta$. Τότε, έχουμε ότι: $f^3(\alpha) + f(\alpha) = \alpha$ και $\alpha = \beta^3 + \beta$. Είναι:

$$f^3(\alpha) + f(\alpha) = \beta^3 + \beta \Leftrightarrow$$

$$[f(\alpha) - \beta]\left[f^2(\alpha) + f(\alpha)\cdot\beta + \beta^2 + 1\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) = \beta,$$

αφού $f^2(\alpha) + f(\alpha)\cdot\beta + \beta^2 + 1 > 0$.
Θέτοντας στη σχέση $f^3(x) + f(x) = x$ όπου x το $f^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, βρίσκουμε ότι:

$$\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right]^3 + f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(x) = x^3 + x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Τονίζουμε και εδώ ότι η ενέργεια να θέσουμε $f(x) = y$ και να αντικαταστήσουμε:

$$f^3(x) + f(x) = x \Leftrightarrow x = y^3 + y$$

δεν εξασφαλίζει ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, ούτε δίνει την αντίστροφη της f.

Γενικά σχόλια

1. Από τη σχέση $f^3(x) + f(x) = x$, χωρίς άλλο δεδομένο, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Πράγματι, αν δεν ήταν γνησίως αύξουσα, θα υπήρχαν x_1, x_2 τέτοια, ώστε $x_1 < x_2$ και $f(x_1) \geq f(x_2)$. Έτσι $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$, οπότε:

   $$f^3(x_1) + f(x_1) \geq f^3(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2,$$

   που είναι άτοπο. Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις $f^3(x) + f(x) = x$ και $f^3(x_0) + f(x_0) = x_0$, όπως στην **ΕΦΑΡΜΟΓΗ 12**.

2. Το σύνολο τιμών σε παρόμοιες ασκήσεις, όπως αναλύσαμε και στην αρχή της παρούσας εργασίας, βρίσκεται και ως εξής:

   - Η πιθανή αντίστροφη της f είναι η $g(x) = x^3 + x$.
   - Η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και 1-1.
   - Η δοσμένη σχέση δίνει ότι

     $$g(f(x)) = x = g\left(g^{-1}(x)\right) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = g^{-1}(x)$$

     για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αλλά η g^{-1} έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της g, δηλαδή το $\mathbb{R}$. Άρα και η $f = g^{-1}$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 14 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και F μια αρχική της f με $F(0) = 1$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(2017 - x)F(x - 2017) = 2017 - x,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(3x) = f(2x) + f(4x)$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

α) Θέτουμε όπου x το $2017 - x$ και βρίσκουμε ότι:

$$f(x)F(-x) = x.$$

Θέτοντας στη σχέση αυτή όπου x το $-x$ βρίσκουμε ότι:

$$f(-x)F(x) = -x.$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε ότι:

$$f(x)F(-x) - f(-x)F(x) = 2x \Leftrightarrow$$

$$F'(x)F(-x) + (F(-x))'F(x) = 2x \Leftrightarrow$$

$$F(x)F(-x) = x^2 + c \overset{F(0)=1}{\Leftrightarrow}$$

$$F(x)F(-x) = x^2 + 1 \ \ (1).$$

Άρα, διαιρώντας κατά μέλη:

$$\frac{f(x)F(-x)}{F(x)F(-x)} = \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow \ln|F(x)| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |F(x)| = \sqrt{x^2+1}.$$

Από τη σχέση (1) και αφού $F(0) = 1$, έχουμε ότι $F(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι, βρίσκουμε ότι $F(x) = \sqrt{x^2+1}$ και άρα

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

β) Επειδή $f'(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα. Βρίσκουμε τελικά ότι $f(\mathbb{R}) = (-1, 1)$.
γ) Το $x = 0$ είναι προφανής ρίζα της δοσμένης εξίσωσης. Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδική. Αν $x > 0$, τότε είναι $f(x) < f(2x)$ και $f(3x) < f(4x)$, οπότε

$$f(x) + f(3x) < f(2x) + f(4x).$$

Άρα η εξίσωση δεν έχει θετική ρίζα. Όμοια, βρίσκουμε ότι δεν έχει ούτε αρνητική ρίζα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 15 Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(x^2+1) - x + 1 \text{ και } g(x) = e^x + x^2 - x - 1,$$

α) Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία.
β) Να λυθεί η εξίσωση $(f \circ g)(x) = 1$.
γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

α) Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,\ +\infty)$ (Μοναδική ρίζα της g είναι η $x = 0$.)
β) Η εξίσωση γράφεται

$$f\left(g(x)\right) = f(0) \overset{f:\ 1-1}{\Longleftrightarrow} g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

από το ερώτημα **α)**.
γ) Βρίσκουμε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 16 Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} - 2.$$

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.
γ) Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} = y + 2 \\ y + \sqrt[3]{y} + \sqrt[5]{y} = z + 2 \\ z + \sqrt[3]{z} + \sqrt[5]{z} = x + 2 \end{cases}$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
β) Βρίσκουμε ότι $f\left([0,\ +\infty)\right) = [-2,\ +\infty)$ και ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.
γ) Είναι $x = z + \sqrt[3]{z} + \sqrt[5]{z} - 2 = f(z)$ και τελικά:

$$x = f\left(f\left(f(x)\right)\right).$$

Με απαγωγή σε άτοπο προκύπτει ότι η εξίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την $f(x) = x$. Έτσι, είναι $x = y = z$. Επειδή

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1,$$

βρίσκουμε ότι το σύστημα έχει τη μοναδική λύση $(x,\ y,\ z) = (1,\ 1,\ 1)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 17 Δίνεται η συνάρτηση

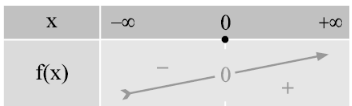
$$f(x) = 2\ln x + x^2 - 1.$$

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
β) Να μελετηθεί η f ως προς τα κοίλα και να βρεθούν τα σημεία καμπής της C_f.
γ) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.
δ) Να βρεθεί το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f.
ε) Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x) + f(x^5) = f(x^2) + f(x^{10}).$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
β) Βρίσκουμε ότι $f''(x) = -\dfrac{2}{x^2} + 2 = 2\dfrac{x^2-1}{x^2}$. Η f είναι κοίλη στο (0,1] και κυρτή στο $[1,\ +\infty)$. Το $M(1, 0)$ είναι σημείο καμπής της C_f.
γ) Το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.
δ) Επειδή $f(1) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε ότι:



Οι τιμές της f είναι αρνητικές στο $(0, 1)$ και θετικές στο $(1,\ +\infty)$.
ε) Το $x = 1$ είναι προφανής ρίζα της δοσμένης εξίσωσης.

- Για $x \in (0,\ 1)$ είναι $x > x^2$ και $x^5 > x^{10}$, οπότε: $f(x) > f(x^2)$ και $f(x^5) > f(x^{10})$ και επομένως $f(x) + f(x^5) > f(x^2) + f(x^{10})$.

- Για $x > 1$ είναι $f(x) < f(x^2)$ και $f(x^5) < f(x^{10})$, οπότε $f(x) + f(x^5) < f(x^2) + f(x^{10})$.

Άρα η εξίσωση έχει τη μοναδική ρίζα $x = 1$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 18 Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{\frac{\beta}{x}},$$

όπου α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.
α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία.
β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f.
γ) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f.
δ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_\alpha^\beta \frac{f\left(x\right)}{x} dx.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

Πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}^*$.

α) Βρίσκουμε ότι $f'(x) = \dfrac{1}{\alpha}e^{\frac{x}{\alpha}} + \dfrac{\beta}{x^2}e^{\frac{\beta}{x}} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄(x)	+		+
f(x)	↗		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\Delta_1 = (-\infty,\ 0)$ και $\Delta_2 = (0,\ +\infty)$.

β) Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 1$, οπότε:

$$f(\Delta_1) = (-1,\ 1).$$

Επίσης, είναι $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, οπότε:

$$f(\Delta_2) = (0,\ +\infty).$$

Τελικά, βρίσκουμε ότι $f(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}$.

γ) Η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, αφού $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$. Η ευθεία $y = -1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

δ) Θέτουμε $x = \alpha\beta\dfrac{1}{t}$, οπότε $dx = -\alpha\beta\dfrac{1}{t^2}$. Για $x = \alpha$ είναι $t = \beta$, ενώ για $x = \beta$ είναι $t = \alpha$. Άρα:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{\frac{x}{\alpha}} - e^{\frac{x}{\beta}}}{x}dx =$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} \frac{e^{\frac{\beta}{t}} - e^{\frac{t}{\alpha}}}{\alpha\beta\dfrac{1}{t}}\left(-\alpha\beta\frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$= \int_{\beta}^{\alpha} \frac{e^{\frac{\beta}{t}} - e^{\frac{t}{\alpha}}}{t}dx = -I,$$

οπότε $I = 0$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 19 (Επαναληπτικές Εξετάσεις 2016) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{x} &, \quad 0 < x < 1 \\ 1 &, \quad x = 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} &, \quad x > 1 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της C_f .

β) Να αποδείξετε ότι το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, +\infty)$.

ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = x_0$, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E = \frac{-{x_0}^2 - 2x_0 + 2}{2}.$$

δ) Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1, +\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$(x+1)\,F(x) > xF(1) + F\left(x^2\right)$$

για κάθε $x > 1$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

α) Η συνέχεια προκύπτει με τον ορισμό, βρίσκοντας τα πλευρικά όρια της f στο 1. Η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, ενώ η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) Η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1, αφού

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

και

$$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = 1.$$

Για $x > 1$ είναι

$$f'(x) = \frac{x - 1 - x\ln x}{x(x-1)^2} = \frac{g(x)}{x(x-1)^2}.$$

Μελετώντας την παράγωγο της g, βρίσκουμε ότι $g(x) < 0$, άρα και $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$. Επίσης, έχουμε ότι $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2} > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Άρα το $x_0 = 1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε έχει τελικά σύνολο τιμών το $f((0,+\infty)) = (-\infty, 1]$.

γ) Αν $\Delta_1 = (0,1]$ και $\Delta_2 = (1,+\infty)$, τότε έχουμε ότι $0 \in f(\Delta_1) = (-\infty,1]$ και $0 \notin f(\Delta_2) = (0,1)$. Άρα, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία μάλιστα ανήκει στο διάστημα $(0,1)$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E = \int_{x_0}^{1}\left(\frac{\ln x}{x} + 1\right)dx.$$

Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας ότι $\ln x_0 = -x_0$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα.

δ) Εφαρμόζουμε για την F το Θεώρημα Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[1,x]$ και $[x,x^2]$. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε ότι η $F' = f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$, οπότε $F'(\xi_1) > F'(\xi_2)$ κ.λπ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 20 (Εξετάσεις 2016) Δίνεται η συνάρτηση

$$f\left(x\right)=e^{x^2}-x^2-1.$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.
γ) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(|\text{ημ}x|+2\right)-f\left(|\text{ημ}x|\right)=f\left(x+2\right)-f\left(x\right).$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$$f'\left(x\right)=2xe^{x^2}-2x$$

και

$$f''\left(x\right)=2\left(e^{x^2}-1\right)+4x^2e^{x^2}.$$

Βρίσκουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Είναι επίσης $f''\left(x\right)\geq 0$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x=0$. Επομένως η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
β) Είναι $f(\mathbb{R})=[0,+\infty)$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$.
γ) Η δοσμένη εξίσωση παίρνει τη μορφή $g\left(|\text{ημ}x|\right)=g\left(x\right),$ όπου $g\left(x\right)=f\left(x+2\right)-f\left(x\right)$.
Αλλά η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα, αφού

$$g'\left(x\right)=f'\left(x+2\right)-f'\left(x\right)>0$$

και η f' είναι γνησίως αύξουσα. Έτσι, αφού η g είναι $1-1$ παίρνουμε ισοδύναμα ότι:

$$|\text{ημ}x|=x\Leftrightarrow x=0.$$

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστούμε τους συναδέλφους Φωτεινή Καλδή, Χρήστο Κυριαζή, Σταύρο Παπαδόπουλο και Δημήτρη Σκουτέρη για τις εύστοχες παρατηρήσεις και την με οποιονδήποτε τρόπο συμβολή τους στο περιεχόμενο αυτού του άρθρου.