Εκθέτης
Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας
Φύλλο 16, 2 Μαΐου 2016

ISSN 2241-3367
Εκδίδεται στην Αθήνα.
Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος:
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το LaTeX 2ε
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Μαθηματικός, MSc, PhD
Πρότυπο Γενικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com

Μία Εισαγωγή στους Μιγαδικούς Αριθμούς

Ν.Σ. Μαυρογιάννης

Περίληψη

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζεται υλικό στο οποίο στηρίχθηκε μία σειρά μαθημάτων που δόθηκαν κατά τα σχολικά έτη 2005-2006, 2006-2007 και 2011-2012 στους μαθητές μου της Θετικής Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου αμέσως μετά την διδασκαλία των διανυσμάτων. Διήρκεσαν περίπου 3 διδακτικές ώρες. Σκοπός είναι να γίνει μία «φυσική» εισαγωγή στους μιγαδικούς αριθμούς με την βοήθεια των διανυσμάτων. Η βασική ιδέα, που φυσικά δεν είναι καινούργια (βλ. λ.χ. [Evans],[Fuchs & Szele,]), είναι να προσπαθήσουμε να εισαγάγουμε ένα πολλαπλασιασμό στα διανύσματα του επιπέδου κατά τρόπο ώστε να μιμηθούμε, κατά το δυνατόν τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών. Τεχνικά μιλώντας το πρόβλημα είναι να «μετατραπεί» ο διανυσματικός χώρος των διανυσμάτων του επιπέδου σε μία πραγματική άλγεβρα και τελικά σε σώμα. Αυτό γίνεται προβάλλοντας διαδοχικές «αξιώσεις» ώσπου στο τέλος ορίζεται ο πολλαπλασιασμός των μιγαδικών. Η διάταξη που έχω επιλέξει δεν είναι η συντομότερη δυνατή. Η αργοπορία είναι *εσκεμμένη* για να δοθεί στους μαθητές η χρονική δυνατότητα να εξοικειωθούν με τη νέα κατασκευή. Η εισαγωγή συνοδεύτηκε, στο περιθώριο των μαθημάτων, από απλές υπολογιστικές ασκήσεις μιγαδικών προκειμένου η νέα γνώση να γίνει ευσταθής. Μέρος αυτής της δουλειάς παρουσιάσθηκε σε εισήγηση με τίτλο «*Βέλη και Αδύνατοι Αριθμοί*» στην ημερίδα «*Καινοτομίες και κριτική σκέψη: Αναζητώντας πρακτικές για τη σχολική τάξη*» που οργάνωσαν οι Σχολικοί Σύμβουλοι Δ.Δ.Ε. Β΄ Αθήνας στο Κολλέγιο Ψυχικού την 27-10-2010.

1 Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι οι μιγαδικοί αριθμοί εισήχθησαν στα Μαθηματικά στα μέσα του 16ου αιώνα προκειμένου να καταστεί δυνατή η επίλυση των τριτοβαθμίων εξισώσεων ([Θωμαΐδης],[Kleiner], [Green], [Nahin]). Οι πρώτη αλγεβρική τεχνική που αναπτύχθηκε ήταν εκείνη της επίλυσης με ριζικά όπου όπως στην επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης οι ρίζες εκφράζονται ως παραστάσεις των συντελεστών με την βοήθεια των τεσσάρων πράξεων και ριζικών. Η τεχνική αυτή που αναπτύχθηκε από τους Del Ferro, Fontana (Tartaglia), Cardano προσέκρουε σε μία δυσκολία που η έκταση της δεν ήταν γνωστή εκείνη την εποχή. Τριτοβάθμιες εξισώσεις με ακέραιους συντελεστές και πραγματικές αλλά *άρρητες ρίζες* ρίζες ήταν αδύνατο να επιλυθούν με ριζικά αν δεν χρησιμοποιούνταν μιγαδικοί αριθμοί[1]. Πρόκειται για την περίφημη μη αναγώγιμη περίπτωση (casus irreducibilis)[2]. Παρά το γεγονός ότι οι μιγαδικοί αριθμοί προσέφεραν λύση στο πρόβλημα που «κλήθηκαν» να επιλύσουν, η χρήση τους αντιμετωπίστηκε αρχικά με επιφύλαξη. Αν και οι μιγαδικοί από την Άλγεβρα του Bombelli (το έργο μπορεί να βρεθεί στο διαδίκτυο για την σημασία του βλ. και La Nave & Mazur και μετά άρχισαν να χρησιμοποιούνται συστηματικά οι αρχικές επιφυλάξεις δεν παραμερίστηκαν. Ο Euler στην Άλγεβρα, που απέχει περίπου 200 χρόνια από την Άλγεβρα του Bombelli έγραφε: «... είναι προφανές ότι δε μπορούμε να κατατάξουμε την τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού αριθμού μεταξύ των δυνατών αριθμών, και συνεπώς πρέπει να πούμε ότι αυτός είναι μια αδύνατη ποσότητα. Με αυτό τον τρόπο οδηγούμεθα στην ιδέα αριθμών που είναι από την φύση τους αδύνατοι...».[3]

Η εδραίωση της θέσης των μιγαδικών αριθμών πραγματοποιήθηκε τον 19ο αιώνα με τις προόδους της Άλγεβρας και της θεωρίας μιγαδικών συναρτήσεων. Το ότι οι φανταστικοί αριθμοί είναι εξ΄ ίσου πραγματικοί με τους πραγματικούς έγινε αντιληπτό με τον καιρό ιδίως όταν οι μιγαδικοί συνδέθηκαν με συντεταγμένες και διανύσματα. Η σύνδεση των μιγαδικών αριθμών με τα διανύσματα έγινε κυρίως από τους Caspar Wessel (1745-1818) και Jean-Robert Argand (1768-1822). Μάλιστα ο πρώτος θεωρούσε την έννοια του μιγαδικού πιο φυσική και κατάλληλη να εξηγήσει την έννοια του διανύσματος. Η σύνδεση των διανυσμάτων με τους μιγαδικούς μας βοηθάει να κατανοήσουμε και τις δύο έννοιες και είναι εξαιρετικά γόνιμη ([Deaux], [Hahn], [Harkin, &Harkin], [Yaglom])

Παρ΄ όλες αυτές τις προόδους η «φύση» και η σε διδακτικό επίπεδο παρουσίαση των μιγαδικών αριθμών υπήρξε αντικείμενο συζητήσεων ακόμη και στον 20ο αιώνα. Λ.χ. στο [Allen] επισημαίνονται αδυναμίες στην έκθεση των μιγαδικών σε καθιερωμένα βιβλία Άλγεβρας όπως των Weber, Serret, Chrystal ενώ χαρακτηριστική η κριτική που ασκείται στο [Hardy] για το [Bowley] (βλ. και [Palmer]. Γενικά για την εισαγωγή των μιγαδικών βλ. [Bosch & Krajkiewicz], [Diamond], [Dorman, Tollefson & Stein], [Nahin], [Landau], [Ledermann], [Schmalz], [Temple], [Willson]

2 Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

2.1 Επισκόπηση

Έχουμε μάθει ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ορίζεται να είναι μηδέν αν κάποιο από τα δύο αυτά διανύσματα είναι μηδέν και να είναι

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\,\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right) \tag{1}$$

όταν κάποιο από τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι διάφορα του μηδενικού διανύσματος. Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων έχει, όπως ξέρουμε,

[1] Με άλλες μεθόδους όπως λ.χ. με χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων (τεχνική που εισήγαγε ο Vieta η δυσκολία αυτή παρακάμπτεται
[2] Birkhoff & MacLane: 414
[3] Euler σελίδα 43

τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha} \tag{2}$$

$$\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} \tag{3}$$

$$\kappa\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)=\left(\kappa\vec{\alpha}\right)\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\left(\kappa\vec{\beta}\right) \tag{4}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων τότε κάθε διάνυσμα του επιπέδου γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{i}$, $\vec{j}$ κατά μοναδικό τρόπο. Αν τώρα έχουμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$ και $\vec{\beta}=\kappa\vec{i}+\lambda\vec{j}$ τότε

$$\begin{gathered}\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\cdot\left(\kappa\vec{i}+\lambda\vec{j}\right)=\\ x\kappa\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right)+\left(x\lambda+y\kappa\right)\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)+\left(y\lambda\right)\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right)\end{gathered} \tag{5}$$

Βέβαια

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=1,\qquad \vec{i}\cdot\vec{j}=0 \tag{6}$$

και επομένως η (5) έχει τη γνωστή μας μορφή:

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=x\kappa+y\lambda \tag{7}$$

Στα μαθήματα μας ξεκινήσαμε από την (1) παρατηρήσάμε ότι αυτή έχει ως άμεση συνέπεια την (2) αλλά και τις (6) χρησιμοποιήσαμε το νόμο των συνημιτόνων για να αποδείξουμε την (5) και στο τέλος αποδείξαμε τις (3), (4) που ως συνέπεια έχουν την (5)

2.2 Μια παρατήρηση για τη σειρά των αποδείξεων

Η σειρά που ακολουθήσαμε είναι εκείνη του σχολικού βιβλίου και είναι αρκετά φυσιολογική. Θα μπορούσαμε όμως να εργασθούμε αλλιώς, κάτι που γίνεται σε πολλά βιβλία. Να απαιτήσουμε το γινόμενο μας $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ να είναι ένας **αριθμός** που να έχει τις ιδιότητες (2),(3), (4) στη συνέχεια να αποδείξουμε την (5) και αφού **ορίσουμε** να ισχύουν οι (6) να καταλήξουμε στην (7). Η δε (1) να αποδειχθεί στο τέλος. Η δεύτερη αυτή πορεία είναι πιό τεχνητή αλλά «λέει» εξ' αρχής τί θέλουμε να κάνουμε:

Θέλουμε να πολλαπλασιάζουμε διανύσματα έτσι ώστε το αποτέλεσμα να είναι αριθμός

Ο πολλαπλασιασμός να «σέβεται» αρκετά τις ιδιότητες των πράξεων

Τα $\vec{i}$, $\vec{j}$ θα πολλαπλασιάζονται σύμφωνα με την «προπαίδεια»

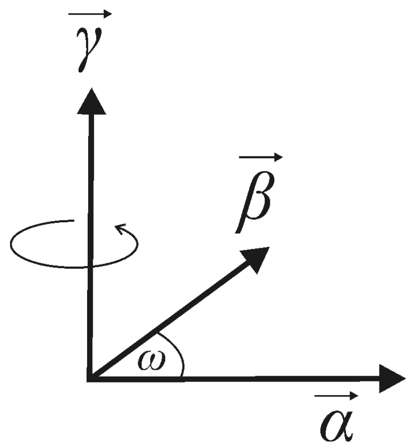
$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$
$\vec{i}$	1	0
$\vec{j}$	0	1

2.3 Το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι «εσωτερικό»

Όταν σχηματίζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ το αποτέλεσμα είναι αριθμός δηλαδή **κάτι έξω** από τα διανύσματα. Θα ήταν μάλλον πιο λογικό να ονομάζεται εξωτερικό γινόμενο. Παρά το ότι έχουν χρησιμοποιηθεί και άλλα ονόματα όπως *αριθμητικό γινόμενο* εν τούτοις ο όρος **εσωτερικό γινόμενο** έχει ιστορικά επικρατήσει. Ο όρος **εξωτερικό γινόμενο** έχει «παραχωρηθεί»[4] για το αποτέλεσμα ενός ορισμένου είδους πολλαπλασιασμού που συμβολίζεται με $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ και τον συναντάμε πολύ συχνά στην Φυσική. Αν $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ τότε το $\vec{\gamma}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με φορά που βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλία και μέτρο:

$$|\vec{\gamma}|=|\vec{\alpha}|\left|\vec{\beta}\right|\eta\mu\omega$$

όπου ω είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.



3 Διάνυσμα επί διάνυσμα ίσον διάνυσμα

3.1 Το πρόβλημα.

Μπορούμε να έχουμε ένα πολλαπλασιασμό διανυσμάτων ώστε το αποτέλεσμα να είναι διάνυσμα; Δηλαδή να έχουμε ένα κανόνα που σε δύο διανύσματα να αντιστοιχεί ένα τρίτο διάνυσμα και η πράξη να είναι πολλαπλασιασμός; Αλλά τι εννοούμε λέγοντας «πολλαπλασιασμός»; Θα μας ήταν αρκετό να πούμε ότι το αποτέλεσμα είναι πάντα το διάνυσμα $\vec{0}$; Τυπικά θα μπορούσαμε αλλά είναι ένας άχρηστος πολλαπλασιασμός. Από ένα πολλαπλασιασμό θα περιμέναμε να μοιάζει όσο γίνεται περισσότερο με τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών. Θα περιμέναμε να δηλαδή να «συνεργάζεται» καλά:

Με τον εαυτό του.

Την άλλη πράξη των διανυσμάτων, την πρόσθεση.

Την πράξη του πολλαπλασιασμού διανυσμάτων επί αριθμό

Με το μέτρο διανυσμάτων

Για την ώρα δεν ξέρουμε πως θα είναι αυτός ο πολλαπλασιασμός ούτε αν έχουμε ελπίδες να τον ορίσουμε. Ας πούμε ότι το πετύχαμε και ότι ο πολλαπλασιασμός μας είναι ο $\odot$. Με άλλα λόγια ότι αν έχουμε δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε με αυτό τον πολλαπλασιασμό να τα πολλαπλασιάσουμε και να πάρουμε το γινόμενο τους, ως προς αυτό τον πολλαπλασιασμό βέβαια, $\vec{\alpha}\odot\vec{\beta}$.

[4]Οι όροι *εσωτερικό* και *εξωτερικό* γινόμενο οφείλονται στον H. G. Grassmann (1809-1877) ο οποίος μελέτησε διάφορα είδη πολλαπλασιασμού των διανυσμάτων

3.2 Κάνοντας το πρόβλημα πιο συγκεκριμένο.

Είπαμε πριν ότι ο πολλαπλασιασμός που ψάχνουμε πρέπει να συνεργάζεται πρώτα απ΄ όλα καλά με τον εαυτό του. Δύο λογικές απαιτήσεις θα ήταν να ισχύουν, για όλες τις επιλογές διανυσμάτων $\vec{\alpha}\odot\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ οι ισότητες:

$$\vec{\alpha}\odot\vec{\beta}=\vec{\beta}\odot\vec{\alpha} \tag{8}$$

και

$$\left(\vec{\alpha}\odot\vec{\beta}\right)\odot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\odot\left(\vec{\beta}\odot\vec{\gamma}\right) \tag{9}$$

Θα σημειώσατε ότι η ιδιότητα (8) είναι η ανάλογη της (2) του εσωτερικού γινομένου. Επίσης θα θυμάστε από τα μαθήματα μας ότι δεν υπάρχει ελπίδα να έχουμε για το εσωτερικό γινόμενο ιδιότητα ανάλογη της (9)[5].

Συνεργασία με την πρόσθεση σημαίνει να μπορούν να επιμερίζονται τα γινόμενα όταν συναντούν αθροίσματα δηλαδή να ισχύει

$$\vec{\alpha}\odot\left(\vec{\beta}+\vec{\gamma}\right)=\left(\vec{\alpha}\odot\vec{\beta}\right)+\left(\vec{\alpha}\odot\vec{\gamma}\right) \tag{10}$$

ιδιότητα που ασφαλώς έχει και το εσωτερικό γινόμενο λόγω της (3).

Ακόμη θέλουμε το γινόμενο μας να έχει μία ιδιότητα ανάλογη με την (4) δηλαδή να ισχύει

$$\kappa\left(\vec{\alpha}\odot\vec{\beta}\right)=\left(\kappa\vec{\alpha}\right)\odot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\odot\left(\kappa\vec{\beta}\right) \tag{11}$$

Οι ιδιότητες (8), (9), (10) και (11) μας επιτρέπουν να κάνουμε αρκετές πράξεις. Για παράδειγμα

$$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\odot\left(\vec{\gamma}+\vec{\delta}\right)=$$

$$\left(\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\odot\vec{\gamma}\right)+\left(\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\odot\vec{\delta}\right)=$$

$$\left(\vec{\gamma}\odot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\right)+\left(\vec{\delta}\odot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\right)=$$

$$\left(\vec{\gamma}\odot\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{\gamma}\odot\vec{\beta}\right)+\left(\vec{\delta}\odot\vec{\alpha}\right)+\left(\vec{\delta}\odot\vec{\beta}\right)=$$

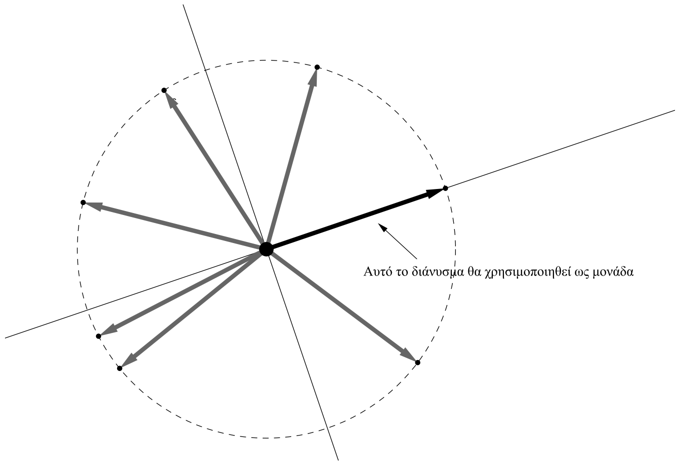
$$\left(\vec{\alpha}\odot\vec{\gamma}\right)+\left(\vec{\beta}\odot\vec{\gamma}\right)+\left(\vec{\alpha}\odot\vec{\delta}\right)+\left(\vec{\beta}\odot\vec{\delta}\right)=$$

$$\vec{\alpha}\odot\vec{\gamma}+\vec{\beta}\odot\vec{\gamma}+\vec{\alpha}\odot\vec{\delta}+\vec{\beta}\odot\vec{\delta}$$

Στην τελευταία σειρά δεν κάναμε άλλη πράξη απλώς παραλείψαμε τις παρενθέσεις όπως κάνουμε και με το συνηθισμένο πολλαπλασιασμό.

3.3 Και ακόμη πιο συγκεκριμένο...

Για τον πολλαπλασιασμό μας θα χρειασθούμε μία μονάδα δηλαδή ένα διάνυσμα που πολλαπλασιαζόμενο με κάθε άλλο διάνυσμα να το αφήνει ως έχει. Είναι λογικό να θέλουμε να έχει και **μήκος** ίσο με μονάδα δηλαδή να είναι ένα **μοναδιαίο** διάνυσμα. Τέτοια έχουμε όσα θέλουμε:



Μπορούμε να πάρουμε ένα οποιοδήποτε και να «χτίσουμε» με βάση αυτό ένα σύστημα αξόνων. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε εξαρχής ότι η μονάδα μας θα είναι το διάνυσμα $\vec{i}$ και να δουλέψουμε με το $\vec{i}$ και το $\vec{j}$ Έστω ότι $\vec{\alpha}=x\vec{i}+y\vec{j}$ και $\vec{\beta}=\kappa\vec{i}+\lambda\vec{j}$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες που θέλουμε να έχει ο πολλαπλασιασμός μας $\odot$ θα έχουμε

$$\vec{\alpha}\odot\vec{\beta}=\left(\left(x\vec{i}\right)\odot\left(\kappa\vec{i}\right)\right)+\left(\left(x\vec{i}\right)\odot\left(\lambda\vec{j}\right)\right)+$$
$$\left(\left(y\vec{j}\right)\odot\left(\kappa\vec{i}\right)\right)+\left(\left(y\vec{j}\right)\odot\left(\lambda\vec{j}\right)\right)$$

και σύμφωνα με την (11) θα έχουμε:

$$\vec{\alpha}\odot\vec{\beta}=x\kappa\left(\vec{i}\odot\vec{i}\right)+x\lambda\left(\vec{i}\odot\vec{j}\right)+y\kappa\left(\vec{j}\odot\vec{i}\right)+y\lambda\left(\vec{j}\odot\vec{j}\right)$$

που λόγω της (8) θα είναι

$$\vec{\alpha}\odot\vec{\beta}=x\kappa\left(\vec{i}\odot\vec{i}\right)+\left(x\lambda+y\kappa\right)\left(\vec{i}\odot\vec{j}\right)+y\lambda\left(\vec{j}\odot\vec{j}\right) \tag{12}$$

Άρα λόγω της (12) αρκεί να συμπληρωθεί ο πίνακας

$\odot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$
$\vec{i}$		
$\vec{j}$		

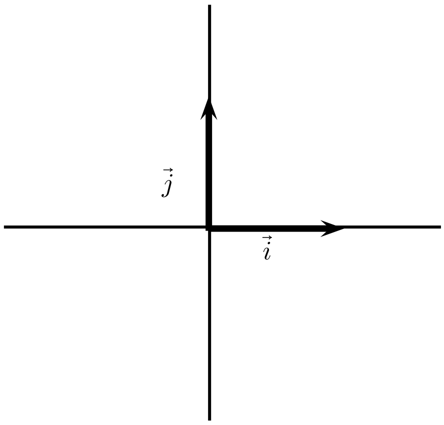
Σημειώστε ότι επειδή θα είναι $\vec{i}\odot\vec{j}=\vec{j}\odot\vec{i}$ χρειάζεται να συμπληρώσουμε τρία μόνο τετράγωνα του πίνακα. Αλλά έχουμε συμφωνήσει πως το $\vec{i}$ θα συμπεριφέρεται σαν μονάδα. Άρα $\vec{i}\odot\vec{i}=\vec{i}$ και $\vec{j}\odot\vec{i}=\vec{j}=\vec{i}\odot\vec{i}$. Επομένως μπορούμε να συμπληρώσουμε τρία από τα τέσσερα τετραγωνάκια του πίνακα μας:

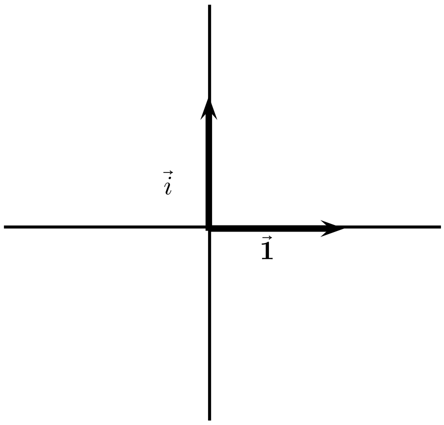
$\odot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$
$\vec{i}$	$\vec{i}$	$\vec{j}$
$\vec{j}$	$\vec{j}$	

Μπορούμε να απλουστεύσουμε λίγο τα πράγματα: Για να θυμόμαστε ότι το $\vec{i}$ θα συμπεριφέρεται ως μονάδα θα το συμβολίζουμε στο εξής με $\mathbf{1}$. Για λόγους απλότητας θα παραλείπουμε το βελάκι δηλαδή αντί για $\vec{\mathbf{1}}$ θα γράφουμε $\mathbf{1}$. Το σύμβολο $\vec{i}$ μένει τώρα ελεύθερο και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε στη θέση του $\vec{j}$. Δηλαδή οι νέοι συμβολισμοί θα είναι

$\vec{\mathbf{1}}$ αντί του $\vec{i}$ και
$\vec{i}$ αντί του $\vec{j}$

[5] Έχουμε δεί ότι αν σημαίνει κάτι η ισότητα $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\right)$ θα σημαίνει αναγκαστικά $\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\right)\vec{\gamma}=\left(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\right)\vec{\alpha}$ και η τελευταία σχέση ισχύει μόνο όταν $\vec{\gamma}//\vec{\alpha}$ ή όταν $\vec{\beta}=\vec{0}$.





Άρα ο πίνακας του πολλαπλασιασμού μας μέχρι στιγμής είναι:

$\odot$	$\vec{\mathbf{1}}$	$\vec{i}$
$\vec{\mathbf{1}}$	$\vec{\mathbf{1}}$	$\vec{i}$
$\vec{i}$	$\vec{i}$	

3.4 Λίγα περισσότερα για τον πολλαπλασιασμό

Ποιο όμως θα είναι το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού $\vec{i} \odot \vec{i}$. Ότι και να είναι πρόκειται, όπως έχουμε συμφωνήσει, για ένα διάνυσμα. Επομένως θα μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{1}$ και $\vec{i}$. Ας πούμε λοιπόν ότι

$$\vec{i} \odot \vec{i} = p\vec{\mathbf{1}} + q\vec{i}$$

Μπορούμε να συμφωνήσουμε όπως και στις δυνάμεις αντί για $\vec{i} \odot \vec{i}$ να γράφουμε $\vec{i}^2$. Αρκεί να ξέρουμε για ποιό τετράγωνο μιλάμε: Για το $\vec{i} \odot \vec{i}$. Άρα

$$\vec{i}^2 = p\vec{\mathbf{1}} + q\vec{i} \tag{13}$$

Για την ώρα μπορούμε να συμπληρώσουμε τον πίνακα μας:

$\odot$	$\vec{\mathbf{1}}$	$\vec{i}$
$\vec{\mathbf{1}}$	$\vec{\mathbf{1}}$	$\vec{i}$
$\vec{i}$	$\vec{i}$	$p\vec{\mathbf{1}} + q\vec{i}$

Ας δούμε πως θα πολλαπλασιάσουμε το $\alpha\vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}$ με το $\gamma\vec{\mathbf{1}} + \delta\vec{i}$ Είναι

$$\begin{gathered}(\alpha\vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}) \odot (\gamma\vec{\mathbf{1}} + \delta\vec{i}) = \\ \alpha\gamma(\vec{\mathbf{1}} \odot \vec{\mathbf{1}}) + (\alpha\delta + \beta\gamma)(\vec{\mathbf{1}} \odot \vec{i}) + \beta\delta\vec{i}^2 = \\ \alpha\gamma(\vec{\mathbf{1}} \odot \vec{\mathbf{1}}) + (\alpha\delta + \beta\gamma)(\vec{\mathbf{1}} \odot \vec{i}) + \beta\delta(p\vec{\mathbf{1}} + q\vec{i}) = \\ (\alpha\gamma + \beta\delta p)\vec{\mathbf{1}} + (\alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta q)\vec{i}\end{gathered}$$

3.5 Η απαίτηση για ύπαρξη αντιστρόφου και οι συνέπειες

Ο πολλαπλασιασμός στους αριθμούς έχει μία αξιοσημείωτη ιδιότητα που είναι ο πρόδρομος της διαίρεσης. Αν έχουμε ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό αριθμό υπάρχει ένας μοναδικός μη μηδενικός αριθμός που το γινόμενο του επί τον πρώτο μας δίνει 1. Αυτό για για τα διανύσματα και τον πολλαπλασιασμό τους μεταφράζεται ως εξής: Για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\alpha\vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}$ υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $x\vec{\mathbf{1}} + y\vec{i}$ ώστε

$$(\alpha\vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}) \odot (x\vec{\mathbf{1}} + y\vec{i}) = \vec{\mathbf{1}}$$

Και επειδή το α' μέλος είναι ίσο με

$$(\alpha x + \beta yp)\vec{\mathbf{1}} + (\alpha y + \beta x + \beta yq)\vec{i}$$

τελικά πρέπει για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\alpha\vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}$ να υπάρχουν μοναδικά x, y ώστε

$$(\alpha x + \beta yp)\vec{\mathbf{1}} + (\alpha y + \beta x + \beta yq)\vec{i} = \vec{\mathbf{1}}$$

Επομένως για κάθε ζεύγος α, β με $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ πρέπει το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x + \beta yp = 1 \\ \alpha y + \beta x + \beta yq = 0\end{array}\right\}$$

δηλαδή το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x + p\beta y = 1 \\ \beta x + (\alpha + \beta q)\, y = 0\end{array}\right\} \tag{14}$$

να έχει μοναδική λύση. Άρα πρέπει η ορίζουσα του

$$\begin{vmatrix}\alpha & p\beta \\ \beta & \alpha + \beta q\end{vmatrix} = \alpha^2 + q\beta\alpha - p\beta^2$$

να είναι διαφορετική του μηδενός για κάθε ζεύγος α, β με $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Η παράσταση $\alpha^2 + q\beta\alpha - p\beta^2$ μπορεί να θεωρηθεί ως δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς α αλλά και ως προς β. Στην πρώτη περίπτωση η διακρίνουσα του είναι

$$\left(q^2 + 4p\right)\beta^2$$

ενώ στην δεύτερη

$$\left(q^2 + 4p\right)\alpha^2$$

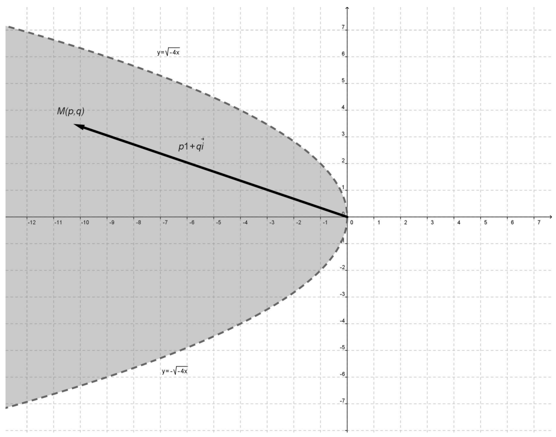
Κάποιο από τα α, β είναι διάφορο του μηδενός. Ας πούμε ότι είναι το β. Θα πρέπει τότε για κάθε α το τριώνυμο $\alpha^2 + q\beta\alpha - p\beta^2$ να είναι διάφορο του μηδενός δηλαδή θα πρέπει $\left(q^2 + 4p\right)\beta^2 < 0$ που σημαίνει ότι

$$q^2 + 4p < 0 \tag{15}$$

Η συνθήκη (15) μας λέει και ποια διανύσματα $(p\vec{\mathbf{1}} + q\vec{i})$ είναι κατάλληλα για να αποτελέσουν επιλογή για το $\vec{i}^2$. Κατ' αρχάς πρέπει να είναι

$$p < 0$$

και ακόμη $-\sqrt{-4p} < q < \sqrt{-4p}$ που σημαίνει ότι τα πέρατα των κατάλληλων διανυσμάτων $p\vec{\mathbf{1}} + q\vec{i}$ πρέπει να ανήκουν στο χωρίο:



Από τη στιγμή που επιλέξουμε τα p, q να ικανοποιούν την (15) τότε έχουμε ορίσει και ένα πολλαπλασιασμό που εγγυάται ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο θα έχει και αντίστροφο. [6]

Παράδειγμα 1. Αν επιλέξουμε να ορίσουμε

$$\vec{i}^{\,2} = -2 \cdot \vec{\mathbf{1}} + 3\vec{i}$$

Τότε:

1. $\left(2 \cdot \vec{\mathbf{1}} + 3\vec{i}\right) \odot \left(4 \cdot \vec{\mathbf{1}} + 2\vec{i}\right) = 8 \cdot \vec{\mathbf{1}} + 16\vec{i} + 6\vec{i}^2 = 8 \cdot \vec{\mathbf{1}} + 16\vec{i} + 6\left(-2 \cdot \vec{\mathbf{1}} + 3\vec{i}\right) = -4 \cdot \vec{\mathbf{1}} + 34\vec{i}$

2. Για να βρούμε το αντίστροφο του $2 \cdot \vec{\mathbf{1}} + 3\vec{i}$ αναζητουμε x, y τέτοια ώστε $\left(2 \cdot \vec{\mathbf{1}} + 3\vec{i}\right) \odot \left(x \cdot \vec{\mathbf{1}} + y\vec{i}\right) = \vec{\mathbf{1}}$ Αλλά $\left(2 \cdot \vec{\mathbf{1}} + 3\vec{i}\right) \odot \left(x \cdot \vec{\mathbf{1}} + y\vec{i}\right) = 2x \cdot \vec{\mathbf{1}} + (3x + 2y)\,\vec{i} + 3y\vec{i}^2 = 2x \cdot \vec{\mathbf{1}} + (3x + 2y)\,\vec{i} + 3y\left(-2 \cdot \vec{\mathbf{1}} + 3\vec{i}\right) = (2x - 6y) \cdot \vec{\mathbf{1}} + (3x + 11y)\,\vec{i}$ Πρέπει λοιπόν

$$(2x - 6y) \cdot \vec{\mathbf{1}} + (3x + 11y)\,\vec{i} = \vec{\mathbf{1}}$$

και έτσι έχουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 6y &= 1 \\ 3x + 11y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Λύνοντας βρίσκουμε:

$$x = \frac{11}{40}, \quad y = -\frac{3}{40}$$

και επομένως το αντίστροφο του

$$2 \cdot \vec{\mathbf{1}} + 3\vec{i}$$

είναι το

$$\frac{11}{40} \cdot \vec{\mathbf{1}} - \frac{3}{40}\vec{i}$$

3.6 Η τελευταία απαίτηση: Ο πολλαπλασιασμός να συνεργάζεται με το μέτρο.

Θέλουμε το μέτρο των διανυσμάτων να συμπεριφέρεται με στον πολλαπλασιασμό $\odot$ όπως συμπεριφέρεται η απόλυτη τιμή των πραγματικών αριθμών με τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών. Δηλαδή θέλουμε να ισχύει

μέτρο γινομένου=γινόμενο των μέτρων

ή συμβολικά για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ να ισχύει:

$$\left|\left(\alpha \cdot \vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}\right) \odot \left(\gamma \cdot \vec{\mathbf{1}} + \delta\vec{i}\right)\right| = \left|\alpha \cdot \vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}\right| \cdot \left|\gamma \cdot \vec{\mathbf{1}} + \delta\vec{i}\right| \tag{16}$$

Είδαμε ότι

$$(\alpha\vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}) \odot (\gamma\vec{\mathbf{1}} + \delta\vec{i}) = (\alpha\gamma + \beta\delta p)\vec{\mathbf{1}} + (\alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta q)\vec{i} \tag{17}$$

και επομένως η (16) ισοδυναμεί με την:

$$\sqrt{(\alpha\gamma + \beta\delta p)^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta q)^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}$$

που μας λέει ότι για κάθε τετράδα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} &2\alpha\gamma\beta\delta p + \beta^2\delta^2 p^2 + 2\alpha\delta\beta\gamma + \\ &2\alpha\delta^2\beta q + 2\beta^2\delta q + \beta^2\delta^2 q^2 - \beta^2\delta^2 = 0 \end{aligned} \tag{18}$$

Από την ισότητα (18) εξάγουμε κάποια περαιτέρω συμπεράσματα για τα p, q δίνοντας ειδικές τιμές στα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Έτσι για $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0, \delta = 1$

$$-1 + p^2 + q^2 = 0$$

και για $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 1$ ότι:

$$-1 + p^2 + 2q + q^2 = 0$$

από τις οποίες προκύπτει ότι

$$q = 0 \tag{19}$$

οπότε

$$2\alpha\gamma\beta\delta p + \beta^2\delta^2 p^2 + 2\alpha\delta\beta\gamma - \beta^2\delta^2 = 0$$

από την οποία αν θέσουμε $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ βρίσκουμε

$$2p + p^2 + 1 = 0$$

δηλαδή

$$p = -1 \tag{20}$$

Ανακεφαλαιώνοντας:

> Αν απαιτήσουμε από τον πολλαπλασιασμό μας κάθε μη μηδενικό στοιχείο να έχει αντίστροφο έχουμε άπειρες επιλογές για το ποιό μπορεί να είναι το $\vec{i}^{\,2}$.

[6] Δηλαδή υπάρχουν περισσότεροι του ενός πολλαπλασιασμοί που κάνουν το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου δηλαδή το $\mathbb{R}^2$ σώμα (βλ και [Dorman, Tollefson , Stein]). Κάθε τέτοιος πολλαπλασιασμός ουσιαστικά αντιστοιχεί σε μία επέκταση του σώματος $\mathbb{R}$ βαθμού 2. Πρόκειται για αλγεβρική επέκταση της οποίας το ανάγωγο πολυώνυμο θα είναι βαθμού 2 με άλλα λόγια ένα τριώνυμο $x^2 + qx - p$ με αρνητική διακρίνουσα $q^2 + 4p < 0$. Ο πολλαπλασιασμός:

$$(\alpha\vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}) \odot (\gamma\vec{\mathbf{1}} + \delta\vec{i}) = (\alpha\gamma + \beta\delta p)\vec{\mathbf{1}} + (\alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta q)\vec{i}$$

δεν είναι άλλος από τον πολλαπλασιασμό των πολυωνύμων $\alpha + \beta x$, $\gamma + \delta x$ modulo $x^2 + qx - p$ όπου το γινόμενο τους $(\alpha + \beta x)(\gamma + \delta x) = \beta\delta x^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)x + \alpha\gamma$ αντικαθίσταται με το υπόλοιπο της διαίρεσης του με $x^2 + qx - p$ δηλαδή το $(\beta\gamma + \alpha\delta - \beta\delta q)x + \alpha\gamma + \beta\delta p$.

Αν απαιτήσουμε το μέτρο του γινομένου να είναι το γινόμενο των μέτρων τότε καταλήγουμε στην απαίτηση

$$\vec{i}^{\,2} = -\vec{\mathbf{1}} \tag{21}$$

που μας οδηγεί στην ακόλουθη σχέση του πολλαπλασιασμού:

$$(\alpha\vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}) \odot (\gamma\vec{\mathbf{1}} + \delta\vec{i}) = (\alpha\gamma - \beta\delta)\vec{\mathbf{1}} + (\alpha\delta + \beta\gamma)\vec{i} \tag{22}$$

η οποία προκύπτει από την (17) για τις τιμές $q = 0$, $p = -1$ που βρήκαμε.

4 Συνεχίζοντας με την επιλογή $\vec{i}^{\,2} = -\vec{\mathbf{1}}$

4.1 Μία γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού

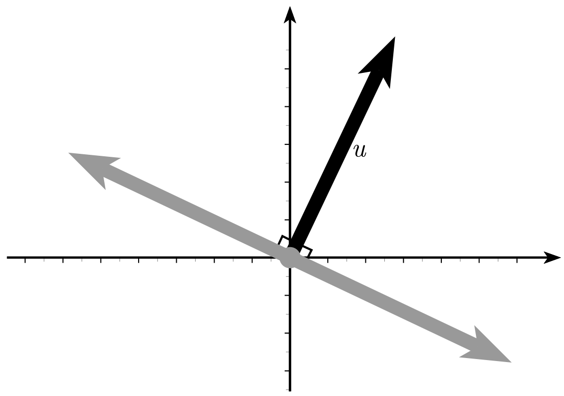
Όταν πολλαπλασιάζουμε το $\vec{u}$ με το $\vec{i}$ σχηματίζεται ένα νέο διάνυσμα το $\vec{u} \odot \vec{i}$. Ας υποθέσουμε ότι $\vec{u} = x\vec{\mathbf{1}} + y\vec{i}$. Τότε $\vec{u} \odot \vec{i} = -y\vec{\mathbf{1}} + x\vec{i}$. Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u} = (x, y)$ και $\vec{u} \odot \vec{i} = (-y, x)$ είναι το $\vec{u} \cdot (\vec{u} \odot \vec{i}) = -xy + yx = 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα διανύσματα είναι κάθετα δηλαδή

$$\vec{u} \perp (\vec{u} \odot \vec{i}) \tag{23}$$

Επομένως το $\vec{u} \odot \vec{i}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο $\vec{u}$ και το μέτρο του είναι

$$|\vec{u} \odot \vec{i}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{i}| = |\vec{u}| \cdot 1 = |\vec{u}|$$

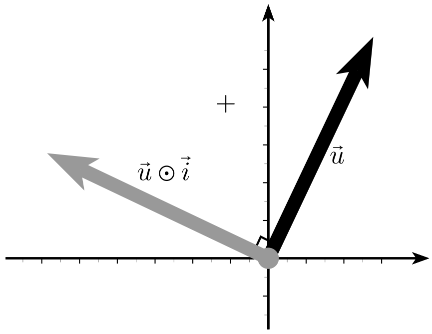
Υπάρχουν δύο αντίθετα διανύσματα τα οποία έχουν μέτρο ίσο με το μέτρο του $\vec{u}$ και είναι κάθετα σε αυτό:



Μπορούμε όμως να βρούμε ποιό από τα δύο είναι το $\vec{u} \odot \vec{i}$ αν εξετάσουμε τα πρόσημα των συντεταγμένων των $\vec{u}$ και $\vec{u} \odot \vec{i}$:

$\vec{u}$		$\vec{u} \odot \vec{i}$	
τετμημένη x	τεταγμένη y	τετμημένη $-y$	τεταγμένη x
+	+	-	+
-	+	-	-
-	-	+	-
+	-	+	+

Από τον παραπάνω πίνακα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν το διάνυσμα $\vec{u}$ βρίσκεται στο 1ο, 2ο, 3ο, 4ο τεταρτημόριο τότε διάνυσμα $\vec{u} \odot \vec{i}$ βρίσκεται αντιστοίχως στο 2ο, 3ο, 4ο, 1ο τεταρτημόριο επομένως από τα δύο κάθετα διανύσματα το $\vec{u} \odot \vec{i}$ είναι εκείνο που προκύπτει από το $\vec{u}$ με περιστροφή 90° κατά την θετική φορά.



Με βάση το προηγούμενο συμπέρασμα μπορούμε να δούμε πως επιδρά στο διάνυσμα $\vec{u}$ ο πολλαπλασιασμός του με το $\alpha\vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}$ δηλαδή πως σχηματιζεται το διάνυσμα $(\alpha\vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}) \odot \vec{u}$ αν ξέρουμε τα $\vec{u}$ και $\alpha\vec{\mathbf{1}} + \beta\vec{i}$. Κατ΄ αρχάς παρατηρούμε ότι:

$$\begin{gathered}(\alpha\vec{1} + \beta\vec{i}) \odot \vec{u} = (\alpha\vec{1}) \odot \vec{u} + (\beta\vec{i}) \odot \vec{u} = \\ \alpha(\vec{1} \odot \vec{u}) + \beta(\vec{i} \odot \vec{u}) = \alpha\vec{u} + \beta(\vec{u} \odot \vec{i})\end{gathered}$$

Επομένως για να βρούμε το

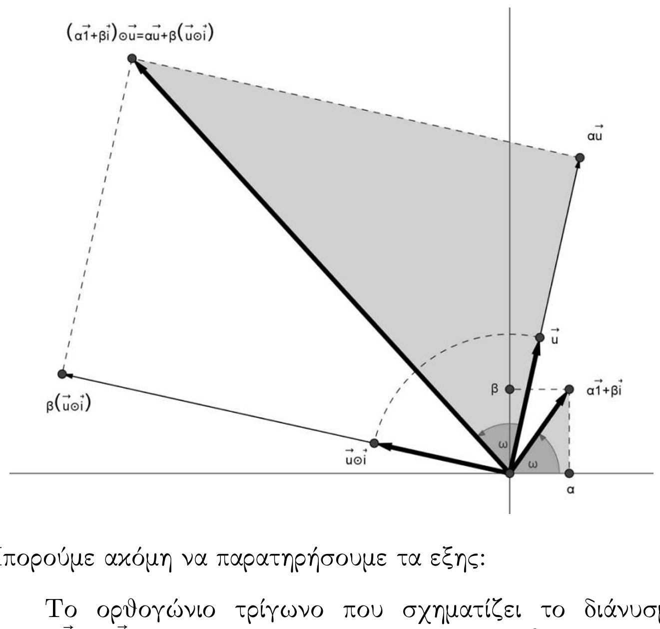
$$(\alpha\vec{1} + \beta\vec{i}) \odot \vec{u}$$

αρκεί να βρούμε τα:

$$\alpha\vec{u}$$

$$\beta(\vec{u} \odot \vec{i})$$

και να τα προσθέσουμε. Το πρώτο είναι εύκολο πρόκειται για το γινόμενο του αριθμού α με το διάνυσμα $\vec{u}$. Για το δεύτερο βρίσκουμε το $\vec{i} \odot \vec{u}$ α) στρέφοντας το $\vec{u}$ κατά ορθή γωνία και κατά την θετική φορά β) πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα $\vec{u} \odot \vec{i}$.



Μπορούμε ακόμη να παρατηρήσουμε τα εξης:

> Το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζει το διάνυσμα $\alpha\vec{1} + \beta\vec{i}$ με την προβολή του στον άξονα $x'x$ είναι όμοιο με το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζουν τα διανύσματα $(\alpha\vec{1} + \beta\vec{i}) \odot \vec{u}$ και $\alpha\vec{u}$. Επομένως η γωνία που σχηματίζει το $(\alpha\vec{1} + \beta\vec{i}) \odot \vec{u}$ με το $\vec{u}$ είναι ίση με τη γωνία ω που σχηματίζει το $\alpha\vec{1} + \beta\vec{i}$ με τον $x'x$.
>
> Ισχύει $|(\alpha\vec{1} + \beta\vec{i}) \odot \vec{u}| = \sqrt{|\alpha\vec{u}|^2 + |\beta(\vec{u} \odot \vec{i})|^2} = \sqrt{\alpha^2|\vec{u}|^2 + \beta^2|\vec{u}|^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot |\vec{u}| = |\alpha\vec{1} + \beta\vec{i}| \cdot |\vec{u}|$

Επομένως για να σχηματίσουμε το γινόμενο $\left(\alpha\vec{1}+\beta\vec{i}\right)\odot\vec{u}=\left(\alpha\vec{1}\right)$ αρκεί

Βήμα 1 Να βρούμε το μέτρο του $\alpha\vec{1}+\beta\vec{i}$.

Βήμα 2 Να βρούμε την γωνία ω που σχηματίζει το διάνυσμα $\alpha\vec{1}+\beta\vec{i}$ με το άξονα $x'x$ δηλαδή την γωνία κατά την οποία πρέπει να στραφεί κατά την θετική φορά ο θετικός ημιάξονας Ox έως ότου να συναντήσει το $\alpha\vec{1}+\beta\vec{i}$.

Βήμα 3 Να περιστρέψουμε κατά την θετική φορά και κατά γωνία ω το διάνυσμα $\vec{u}$

Βήμα 4 Να πολλαπλασιάσουμε το διάνυσμα που βρήκαμε επί το μέτρο του $\alpha\vec{1}+\beta\vec{i}$.

4.2 Ένα νέο σύνολο αριθμών

Τώρα που έχουμε εξοικειωθεί με τον συμβολισμό μπορούμε να κάνουμε κάποιες απλουστεύσεις:

Αντί	Γράφουμε
$\alpha\cdot\overrightarrow{\mathbf{1}}$	α
$\vec{i}$	i
$\odot$	$\cdot$ ή και τίποτε
$\left(\alpha\cdot\overrightarrow{\mathbf{1}}+\beta\vec{i}\right)\odot\left(\gamma\cdot\overrightarrow{\mathbf{1}}+\delta\vec{i}\right)$	$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)$

Μπορούμε λοιπόν να «βλέπουμε» κάθε διάνυσμα (α,β) του επιπέδου σαν μία παράσταση $\alpha+\beta i$. Οι παραστάσεις αυτές που δεν είναι άλλες από τα διανύσματα του επιπέδου:

Συγκρίνονται ως προς την ισότητα: $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i\Leftrightarrow(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta)\Leftrightarrow\alpha=\gamma\quad\text{και}\quad\beta=\delta$

Προσθαφαιρούνται $(\alpha+\beta i)\pm(\gamma+\delta i)=(\alpha,\beta)\pm(\gamma,\delta)=(\alpha\pm\gamma,\beta\pm\delta)=(\alpha\pm\gamma)+(\beta\pm\delta)\,i$

Πολλαπλασιάζονται: Με την βοήθεια της (22) μπορούμε να γράψουμε:

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma-\beta\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)\,i$$

Διαιρούνται: Ο αντίστροφος του $\alpha+\beta i$ από την επίλυση του συστήματος (14) θεωρώντας ότι $p=-1$, $q=0$ δηλαδή του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x-\beta y=1\\ \beta x+\alpha y=0\end{array}\right\}$$

το οποίο έχει λύση, πάντα υπό την προϋπόθεση ότι $\alpha^2+\beta^2\neq0$. Είναι

$$x=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\ \text{ και }\ -\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

Άρα ο αντίστροφος του $\alpha+\beta i$ τον οποίο μπορούμε να συμβολίσουμε και με $\frac{1}{\alpha+\beta i}$ είναι ο

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}i$$

Επομένως αν θέλουμε να διαιρέσουμε τον $\alpha+\beta i$ με τον $\gamma+\delta i$ αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον πρώτο με τον αντίστροφο του δευτέρου που βρίσκεται με την ίδια λογική να είναι ο $\frac{\gamma}{\gamma^2+\delta^2}-\frac{\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$. Άρα $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=(\alpha+\beta i)\frac{1}{\gamma+\delta i}=(\alpha+\beta i)\left(\frac{\gamma}{\gamma^2+\delta^2}-\frac{\delta}{\gamma^2+\delta^2}i\right)=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$

Συνοψίζοντας με τις παραπάνω πράξεις μπορούμε να «βλέπουμε» τα διανύσματα του επιπέδου σαν αριθμούς που προστίθενται, αφαιρούνται, πολλαπλασιάζονται, διαιρούνται. Με αυτές τις συγκεκριμένες πράξεις τα διανύσματα συγκροτούν ένα νέο σύνολο αριθμών τους μιγαδικούς αριθμούς που συμβολίζεται με $\mathbb{C}$. Τα διανύσματα $\alpha+0i$ αποτελούν ένα «αντίτυπο» των πραγματικών αριθμών μέσα στο $\mathbb{C}$ και έτσι θεωρούμε ότι $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$.

Παραπομπές

1. Edward S. Allen, *Discussions: Definitions of Imaginary and Complex Numbers*, The American Mathematical Monthly, 29, 8, 1922, 301-303
2. Garrett Birkhoff, Saunders, MacLane, *A Survey of Modern Algebra* 3d, Macmillan, 1965.
3. W. Bosch, P. Krajkiewicz, *A Categorical System of Axioms for the Complex Numbers, Mathematics Magazine, 43, 2, 1970), 67-70.*
4. Arthur L. Bowley, *A General Course of Pure Mathematics*, Oxford, 1913
5. Louis E. Diamond, *Introduction to Complex Numbers*, Mathematics Magazine, 30, 5, 1957,233-249.
6. Janet Dorman, Jeffrey l. Tollefson , F. Max Stein, *Fields and near-fields of ordered pairs of reals*, The Mathematics Teacher, 59, 4, 1966, 335-341
7. Les Evans, *Complex Numbers and Vectors*, Australian Council for Educational Research, 2006.
8. Leonard Euler, *Elements of Algebra Translated from the French with the notes of M. Bernoulli and the additions of M. De Lagrange. Third edition carefully revised and corrected by the Rev. John Hewlett*, London, Longman, Hurst, Rees, Orme and Co, 1822
9. L. Fuchs, T. Szele, *Introduction of Complex Numbers as Vectors of the Plane*, The American Mathematical Monthly, 59, 9, 1952, 628-631.
10. Roland Deaux, *Introduction to the geometry of complex numbers*, Dover, 2008 (1956).
11. D. R. Green, *The Historical Development of Complex Numbers*, The Mathematical Gazette, 60, 412, 1976, 99-107.
12. Liang-Shin Hahn, *Complex Numbers and Geometry*, The Mathematical Association of America, 1994.
13. G. H. Hardy, *The Definition of a Complex Number*, The Mathematical Gazette, 8, 116, 1915, 48-49.
14. A.A. Harkin, J.B. Harkin, *Geometry of Generalized Complex Numbers*, Mathematics Magazine, 77, 2, 2005, 118-129.
15. Paul J. Nahin, *Φανταστικές Ιστορίες*, Μετ. Τεύκρος Μιχαηλίδης, Κάτοπτρο, 2004.
16. Phillip S. Jones, *Complex numbers: an example of recurring themes in the development of mathematics*, I, II, III, The Mathematics Teacher, 47, 2-3-4 1954, σελίδες 106-114 , 257-264.
17. Israel Kleiner, *Thinking the Unthinkable: The Story of Complex Numbers (with a Moral)*, The Mathematics Teacher, 81, 1988, 583-592.
18. Federica La Nave, Barry Mazur, *Reading Bombelli*, Mathematical Intellingencer,24, 1, 2002, 12-21

19. Edmund Landau, *Foundations of analysis . The arithmetic of whole, rational, irrational and complex numbers*, CHELSEA, 1966

20. Walter Ledermann, *Complex Numbers*, Routledge & Kegam Paul, 1976

21. G. W. Palmer, *The Definition of a Complex Number*, The Mathematical Gazette, 8, 124, 1916, 305

22. D. E. Richmond, *Complex Numbers and Vector Algebra*, The American Mathematical Monthly, Vol. 58, 9, 1951, 622-628.

23. Rosemary Schmalz, *Complex numbers aw residue classes of polynomials* mod $\left(x^2+1\right)$, The Two-Year College Mathematics Journal, 3, 2, 1972, 78-80

24. G. Temple, *The Theory of Complex Numbers*, The Mathematical Gazette, 21, 244, 1937, 220-225

25. William Wynne Willson, *An Approach to Complex Numbers*, The Mathematical Gazette, 54, 390, 1970, 342-346.

26. I.M. Yaglom, *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press, 1968

27. Γιάννης Χ. Θωμαΐδης, *Ιστορική Αναδρομή στους Μιγαδικούς Αριθμούς*, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗ, 21, 1981, 95-109.