Εκθέτης
Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας
Φυλλο 14, 26 Οκτωβριου 2014

ISSN 2241-3367
Εκδίδεται στην Αθήνα.
Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος:
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το LaTeX 2ε
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πρότυπο Γενικό Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ′ Λυκείου

Εξισώσεις

(Μέθοδοι - Σχόλια - Εφαρμογές)

Μπάμπης Στεργίου
Μαθηματικός

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό προσπαθούμε να επισημάνουμε και να περιγράψουμε τις πιο χαρακτηριστικές εξισώσεις που μπορεί να συναντήσει ο μαθητής στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ′ Λυκείου. Για την κάθε περίπτωση δίνουμε μερικά βασικά θεωρητικά στοιχεία που δηλώνουν τη μορφή και υποδεικνύουν στην ουσία τον τρόπο λύσης των ασκήσεων αυτών. Ακολουθούν μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα για την κάθε περίπτωση, ώστε να φανεί πιο συγκεκριμένα ο τρόπος ή οι τρόποι επίλυσης των εξισώσεων αυτών.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τη συνάδελφο Φωτεινή Καλδή για τις εύστοχες παρεμβάσεις της και το συνάδελφο Χρήστο Κυριαζή που με μεράκι επιμελήθηκε το κείμενο, κάνοντας χρήσιμες παρατηρήσεις.

Μεθοδος 1. Κάθε εξίσωση, μετά από πιθανή εκτέλεση πράξεων ή κατάλληλους αλγεβρικούς μετασχηματισμούς (πχ λογαριθμίζοντας ή πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με κατάλληλη μη μηδενιζόμενη παράσταση) έχει ή παίρνει τη μορφή $f(x)=0$, όπου f είναι κατάλληλη συνάρτηση, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A, που είναι και το πεδίο ορισμού της εξίσωσης. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση αυτή δεν μπορεί να λυθεί με αλγεβρικές μεθόδους.

1. Έστω ότι για τη συνάρτηση f γνωρίζουμε ή μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι $1-1$. Προσπαθούμε τότε να βρούμε με παρατήρηση έναν αριθμό $a \in A$, ώστε $f(a)=0$. Φέρνουμε λοιπόν την εξίσωση στη μορφή $f(x)=f(a)$, οπότε λόγω του $1-1$ παίρνουμε:

$$f(x)=f(a) \Leftrightarrow x=a$$

Επομένως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=a$.

2. Είναι συνήθως πιο εύκολο να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Στη συνέχεια προσπαθούμε να εντοπίσουμε με παρατήρηση μια ρίζα της εξίσωσης, δηλαδή αριθμό $a \in A$, ώστε $f(a)=0$.

3. Εντοπίζουμε με παρατήρηση μια ρίζα και με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα.

Εφαρμογη 1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(2^x+3^x)^{2014}=(2^{2014}+3^{2014})^x$$

Λυση

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με 3^{2014x}και η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right]^{2014}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2014}+1\right]^x.$$

Προφανής ρίζα είναι η τιμή $x=2014$. Διακρίνουμε στη συνέχεια τις περιπτώσεις $x<2014$, $x>2014$. Στην πρώτη πχ περίπτωση, όπου $x<2014$, λόγω του γεγονότος ότι η συνάρτηση

$$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$$

είναι γνησίως φθίνουσα, ενώ η συνάρτηση

$$g(x)=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2014}+1\right)^x$$

είναι γνησίως αύξουσα, παίρνουμε:

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right]^{2014}>\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2014}+1\right]^{2014}>\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2014}+1\right]^x$$

που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν ρίζες μικρότερες του 2014. Όμοια εργαζόμαστε και για $x>2014$.

Άρα η μοναδική ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι η $x=2014$.

Εφαρμογη 2. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x)=-f(2-x) \text{ και } f'(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.
2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$, με μόνη την πληροφορία ότι η f είναι παραγωγίσιμη, $f(x)=-f(2-x)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Εξετάσεις 2003.)

Λυση

1. Παρατηρούμε ότι επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται, αυτή θα διατηρεί πρόσημο. Έτσι, η f είναι γνησίως μονότονη και συγκεκριμένα:
   - είναι γνησίως αύξουσα, αν η f'είναι θετική.
   - είναι γνησίως φθίνουσα, αν η f'είναι αρνητική.
2. Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ η δοσμένη σχέση δίνει:
   $$f(1) = -f(2-1) \Leftrightarrow f(1) + f(1) = 0 \Leftrightarrow$$
   $$2f(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0.$$
   Επομένως η τιμή $x = 1$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.
3. Με τις νέες προϋποθέσεις δεν έχουμε εξασφαλισμένη τη μονοτονία της f, αφού δεν γνωρίζουμε τη συνέχεια της f'. Μας αρκεί όμως η f να είναι $1-1$ και αυτό το πετυχαίνουμε με απαγωγή σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι η f δεν είναι $1-1$. Υπάρχουν τότε $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$, ώστε $f(a) = f(b)$. Για την f πληρούνται στο $[a, b]$ οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, οπότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$, τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, άτοπο. Έτσι η f είναι $1-1$, οπότε
   $$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1. \quad \blacksquare$$

Εφαρμογη 3. Να λύσετε την εξίσωση $e^{-x} = x^2 + 1$.

Λυση

Σύμφωνα με τα σχόλια και την ανάλυση της μεθόδου, πρώτα εξετάζουμε αν μπορούμε να εντοπίσουμε ρίζα. Πράγματι, η τιμή $x = 0$ είναι λύση της εξίσωσης. Φέρνουμε όλους τους όρους στο α′ μέλος και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x} - x^2 - 1.$$

Είναι

$$f'(x) = (e^{-x} - x^2 - 1)' = -e^{-x} - 2x$$

και

$$f''(x) = (-e^{-x} - 2x)' = e^{-x} - 2.$$

Φαίνεται όμως με την πρώτη ματιά ότι αφού η πρώτη παράγωγος δε δίνει αμέσως ρίζα και πρόσημο, ενώ η δεύτερη παράγωγος δε διατηρεί πρόσημο, δεν είναι κακή σκέψη να αλλάξουμε τη μορφή της εξίσωσης και αν χρειαστεί, επανερχόμαστε. Είναι λοιπόν:

$$e^{-x} = x^2 + 1 \Leftrightarrow (x^2 + 1)e^x = 1 \Leftrightarrow (x^2 + 1)e^x - 1 = 0$$

Ας θεωρήσουμε επομένως τη συνάρτηση

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x - 1\,,\, x \in \mathbb{R}.$$

Είναι:

- $f(0) = 0$
- $f'(x) = ((x^2 + 1)e^x - 1)' = e^x(x + 1)^2 \ > 0\,,\, x \neq -1$

Η συνάρτηση λοιπόν f είναι γνησίως μονότονη, οπότε η τιμή $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$, συνεπώς και της αρχικής εξίσωσης. $\blacksquare$

Σχόλιο

Να σημειώσουμε ότι θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε την πρώτη μας προσπάθεια, η διαδικασία όμως θα ήταν πιο πολύπλοκη διότι θα έπρεπε να βρούμε το πρόσημο της f'', τη μονοτονία και το πρόσημο της f' και τελικά τη μονοτονία της

$$f(x) = e^{-x} - x^2 - 1.$$

Ας το επιχειρήσει μόνος του ο απαιτητικός μαθητής. Ωστόσο, μια πολύ εύκολη ενέργεια κατέστησε την λύση της άσκησης πολύ πιο απλή. Υπάρχουν περιπτώσεις που χωρίς τον κατάλληλο μετασχηματισμό της εξίσωσης η επίλυσή της είναι δυσχερής ή αδύνατη.

Μεθοδος 2. Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή

$$f(x) = f(\alpha)$$

και αποδεικνύουμε ότι το α είναι το μοναδικό σημείο, στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ακρότατο. Αυτό συνήθως το πετυχαίνουμε με το να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f αλλάζει μονοτονία μόνο στο $x = \alpha$. Για το λόγο αυτό μελετάμε αρχικά την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Στη συνέχεια, αν το α είναι το μοναδικό σημείο, στο οποίο η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό ακρότατο, τότε με τη βοήθεια του ορισμού της μονοτονίας προκύπτει ότι $f(x) \neq f(\alpha)$ για κάθε $x \neq \alpha$. Έτσι το $x = \alpha$ είναι η μοναδική ρίζα.

Εφαρμογη 4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}.$$

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.
3. Να λυθεί η εξίσωση
   $$f(x^2 + 1) + f(x^4 + 1) = 4.$$

Λυση

1. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0, +\infty)$. Είναι:
   $$f'(x) = \left(\ln x + \frac{x+1}{x}\right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$
   Από το πρόσημο της f' προκύπτει ότι η f είναι:

- Γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$.
- Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

2. Από τη μονοτονία της f προκύπτει ότι το $f(1)=2$ είναι ολικό ελάχιστο της f και μάλιστα αυτό παρουσιάζεται μόνο στη θέση $x_0=1$. Αυτό σημαίνει ότι είναι $f(x)>2$ για κάθε $x\neq 1$. Άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=2$ είναι η $x=2$.

Σχόλιο

Μπορούμε να εργαστούμε πιο αναλυτικά ως εξής:

- Αν $x<1$, τότε $f(x)>f(1)=2$, δηλαδή $f(x)>2$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x)\neq 2$ για $x<1$.
- Αν $x>1$, τότε $f(x)>f(1)=2$, δηλαδή $f(x)>2$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x)\neq 2$ για $x>1$.

Επομένως η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x=1$.

3. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση

$$f(x^2+1)+f(x^4+1)=4$$

αληθεύει για $x=0$. Αυτή η ρίζα είναι η μοναδική, αφού για κάθε άλλη τιμή του x είναι $x^2+1\neq 1$ και $x^4+1\neq 1$, οπότε

$$f(x^2+1)>2 \text{ και } f(x^4+1)>2,$$

δηλαδή

$$f(x^2+1)+\ f(x^4+1)>2+2=4.$$

Άρα

$$f(x^2+1)+\ f(x^4+1)=4\Leftrightarrow x=0.\ \blacksquare$$

Εφαρμογη 5. Να λύσετε την εξίσωση

$$x^3+3x+6x\ln x+2=6x^2.$$

Υποδειξη

Αν $f(x)=x^3+3x+6x\ln x+2-6x^2$, με $x>0$, τότε:

$$f'(x)=3x^2+6\ln x+9-12x$$

και

$$f''(x)=6x+\frac{6}{x}-12=\frac{6(x-1)^2}{x}.$$

Έτσι, αφού $f(1)=f'(1)=0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα και τελικά η f αλλάζει μονοτονία μόνο στο $x=1$. Άρα:

- Για $x>1$ είναι $f(x)>f(1)=0$
- Για $0<x<1$ είναι $f(x)>f(1)=0$

Επομένως είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\neq 1$. Συνεπώς μοναδική ρίζα της f είναι η $x=1$. $\blacksquare$

Μεθοδος 3. Αν η εξίσωση έχει σχετικά πολύπλοκη μορφή, προσπαθούμε να τη φέρουμε στη μορφή $f((g(x))=f(h(x))$, όπου f είναι μια κατάλληλη $1-1$ συνάρτηση. Επομένως θα είναι:

$$f((g(x))=f(h(x))\Leftrightarrow g(x)=h(x).$$

Η νέα εξίσωση είτε λύνεται αλγεβρικά, είτε λύνεται όπως στις μεθόδους που περιγράψαμε παραπάνω.

Εφαρμογη 6. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$

Εξετάσεις 2010.

Λυση

Βλέπουμε αρχικά ότι η εξίσωση έχει νόημα (ορίζεται) σε όλο το $\mathbb{R}$. Είναι φανερό ότι μάλλον πρέπει να εξετάσουμε μήπως η εξίσωση παίρνει μια πιο καλή μορφή και όχι να θεωρήσουμε για μελέτη τη συνάρτηση της διαφοράς. Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$\begin{aligned}&2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\tfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]\Leftrightarrow\\ &\ln((3x-2)^2+1)+2(3x-2)=\ln(x^4+1)+2x^2\Leftrightarrow\\ &\ln((3x-2)^2+1)+2(3x-2)=\ln((x^2)^2+1)+2x^2\end{aligned}$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\ln(x^2+1)+2x,$$

τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\ln((3x-2)^2+1)+2(3x-2)=\ln((x^2)^2+1)+2x^2\Leftrightarrow$$

$$f(3x-2)=f(x^2)$$

Θα μελετήσουμε επομένως την f ως προς τη μονοτονία. Είναι

$$f'(x)=\left(\ln(x^2+1)+2x\right)'=\frac{2x}{x^2+1}+2=2\frac{x^2+x+1}{x^2+1}>0.$$

Αφού λοιπόν η παράγωγος της f είναι θετική σε όλο το $\mathbb{R}$, η f είναι γνησίως αύξουσα. Είναι επομένως και $1-1$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$f(3x-2)+f(x^2)\Leftrightarrow 3x-2=x^2\Leftrightarrow$$

$$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow$$

$$(x=2 \text{ ή } x=1).$$

Και οι δύο αυτές τιμές είναι δεκτές, μιας και δεν έχουμε περιορισμούς. $\blacksquare$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(xe^x)$. Να λυθεί η εξίσωση:

$$f(x^4+3) + f(x^2+1) = f(x^4+1) + f(x^2+3).$$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αλλάζοντας τη θέση των όρων παίρνει τη μορφή:

$$f(x^4+3) - f(x^4+1) = f(x^2+3) - f(x^2+1).$$

Είναι

- $f(x) = e^x - \ln(xe^x) = e^x - x - \ln x\ , \ \ \mu\varepsilon\ \ x > 0$
- $f'(x) = (e^x - x - \ln x)' = e^x - \frac{1}{x} - 1$ και

$$f''(x) = (e^x - \frac{1}{x} - 1)' = e^x + \frac{1}{x^2} > 0\,,\ x > 0.$$

Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα. Η μορφή της εξίσωσης μας οδηγεί να θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x+2) - f(x),$$

αφού έτσι η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$g(x^4+1) = g(x^2+1), \quad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$

Είναι όμως: $g'(x) = f'(x+2) - f'(x) > 0$ διότι η f' είναι γνησίως αύξουσα και $x+2 > x$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς είναι και $1-1$. Έτσι, τελικά παίρνουμε:

$$g(x^4+1) = g(x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$x^4+1 = x^2+1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x = 0 \ \text{ ή } \ x = 1 \ \text{ ή } \ x = -1).$$

Σχόλιο

Η δοσμένη εξίσωση παραπέμπει προφανώς και στο θεώρημα μέσης τιμής. Προφανείς ρίζες είναι οι $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$. Θα αποδείξουμε ότι δεν έχει άλλες. Όμως για την εφαρμογή του ΘΜΤ είναι απαραίτητη η διάταξη των αριθμών $x^2+1\,,\ x^2+3\,, x^4+1\ ,\ x^4+3$. Είναι προφανώς

$$x^2+1 < x^2+3 \ \ \kappa\alpha\iota\ x^4+1 < x^4+3.$$

Έτσι ξεκινάμε με τη διάταξη των x^2+3, x^4+1 και βλέπουμε τελικά ότι:

- Αν $|x| \geq \sqrt{2}$, τότε
$$x^2+1 < x^2+3 < x^4+1 < x^4+3.$$
- Αν $1 < |x| < \sqrt{2}$, τότε
$$x^2+1 < x^4+1 < x^2+3 < x^4+3.$$
- Αν $0 < |x| < 1$, τότε
$$x^4+1 < x^2+1 < x^4+3 < x^2+3.$$

Αν λοιπόν εφαρμόσουμε ΘΜΤ στην πρώτη περίπτωση στα διαστήματα $[x^2+1\,,\ x^2+3]$ και $[x^4+1\ ,\ x^4+3]$, τότε η εξίσωση γίνεται:

$$f(x^2+3) - f(x^2+1) = f(x^4+3) - f(x^4+1) \Leftrightarrow$$

$$2f'(x_1) = 2f'(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

με $x_1 \in (x^2+1\,,\ x^2+3)$ και $x_2 \in (\ x^4+1\ ,\ x^4+3)$. Αλλά η σχέση $x_1 = x_2$ οδηγεί σε άτοπο.
Όμοια, σε άτοπο οδηγούμαστε και στις άλλες περιπτώσεις.
■

ΜΕΘΟΔΟΣ 4. Σε ορισμένες, πιο σπάνιες περιπτώσεις, πιθανόν να χρειαστεί να εντοπίσουμε με παρατήρηση δύο ή περισσότερες ρίζες και να αποδείξουμε ότι οι ρίζες αυτές είναι οι μοναδικές. Αυτό μπορεί να γίνει και ως εξής: Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (που παίρνει ή έχει τη μορφή $f(x) = 0$) έχει π.χ τουλάχιστον τρεις ρίζες, οπότε με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle για τις f, f', f'' προσπαθούμε να καταλήξουμε σε άτοπο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 8. Να λύσετε την εξίσωση

$$2^x + 3^{2x} = 9x + 2.$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί $x = 0$, $x = 1$ επαληθεύουν την εξίσωση, οπότε είναι ρίζες. Θα αποδείξουμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο ότι αυτές οι λύσεις είναι οι μοναδικές. Έστω λοιπόν ότι υπάρχει και άλλη λύση και ας ονομάσουμε a, b, c τις τρεις (τουλάχιστον) από τις ρίζες της εξίσωσης, με $a < b < c$. Είναι προφανές ότι δύο από τους αριθμούς a, b, c είναι οι 0 και 1. Η εξίσωση μας οδηγεί στη συνάρτηση

$$f(x) = 2^x + 3^{2x} - 9x - 2.$$

Είναι τότε $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Από το θεώρημα Rolle για την f υπάρχουν $x_1 \in (a, b)$ και $x_2 \in (b, c)$ τέτοια, ώστε: $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$. Επίσης, πάλι από το θεώρημα του Rolle αλλά για την f', υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, με $f''(\xi) = 0$. Είναι όμως:

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + 2 \cdot 3^{2x} \ln 2 - 9$$

και

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2 + 4 \cdot 3^{2x} \ln^2 2 > 0.$$

Αλλά η τελευταία σχέση με την $f''(\xi) = 0$ οδηγούν σε άτοπο. Η εξίσωση λοιπόν δεν μπορεί να έχει τρεις ή περισσότερες ρίζες, οπότε οι λύσεις της είναι αναγκαστικά οι $x = 0$, $x = 1$.■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 9. Να λύσετε την εξίσωση

$$2^x + 3^x + 6^x = 3x^2 + 5x + 3.$$

Υποδειξη

Προφανείς ρίζες είναι οι $x = 0, x = 1, x = -1$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τέσσερις τουλάχιστον ρίζες, τις a, b, c, d με $a < b < c < d$. Όπως στην προηγούμενη εφαρμογή, πάλι με διαδοχικές εφαρμογές του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση

$$f(x) = 2^x + 3^x + 6^x - 3x^2 - 5x - 3,$$

θα πρέπει να υπάρχει ξ με $f^{(3)}(\xi) = 0$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι:

$$f^{(3)}(x) = 2^x \ln^3 2 + 3^x \ln^3 2 + 6^x \ln^3 6 > 0.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή συνάρτηση και $\alpha \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha).$$

Λυση

Παρατηρούμε ότι προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = \alpha$. Έστω ότι υπάρχει και άλλη ρίζα x της εξίσωσης με $x \neq \alpha$, πχ $x > \alpha$. Σύμφωνα με το ΘΜΤ, υπάρχει $\xi \in (\alpha, x)$, τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \Leftrightarrow f(x) = f(\alpha) + f'(\xi)(x - \alpha)$$

Επομένως η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) + f'(\xi)(x - \alpha) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$f'(\xi)(x - \alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow f'(\xi) = f'(\alpha) \Leftrightarrow \xi = \alpha$$

διότι η f είναι κυρτή, οπότε η f', ως γνησίως αύξουσα, είναι $1-1$. Αλλά η σχέση $\xi = \alpha$ οδηγεί σε άτοπο, διότι $\xi \in (\alpha, x)$ που σημαίνει ότι $\xi \neq \alpha$. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο, αν δεχθούμε ότι υπάρχει ρίζα x της εξίσωσης με $x < \alpha$. Άρα η μοναδική ρίζα της δοσμένης εξίσωσης είναι η $x = \alpha$.

Άλλος τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(\alpha, f(\alpha))$ είναι η εξής:

$$(\varepsilon): \; y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha).$$

Αλλά η f είναι κυρτή, οπότε η γραφική της παράσταση είναι πάνω από την εφαπτομένη (ε), με εξαίρεση το σημείο επαφής $M(\alpha, f(\alpha))$. Έτσι, για $x \neq \alpha$ ισχύει ότι:

$$f(x) > y \Leftrightarrow f(x) > f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha).$$

Αφού το $x = \alpha$ είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης, από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι και η μοναδική. ■

Το θεώρημα μέσης τιμής στη λύση εξισώσεων. Μια αξιοσημείωτη περίπτωση.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 11. Να λυθεί η εξίσωση

$$3^x + 5^x = 2^x + 6^x.$$

Λυση

Έστω x ρίζα της εξίσωσης, δηλαδή

$$3^x + 5^x = 2^x + 6^x$$

ή ισοδύναμα

$$3^x - 2^x = 6^x - 5^x \;\; (1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t) = t^x, t > 0.$$

Με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[2, 3]$, $[5, 6]$ προκύπτει ότι υπάρχουν $a \in (2, 3)$ και $b \in (5, 6)$, τέτοια, ώστε:

$$f'(a) = 3^x - 2^x, \quad f'(b) = 6^x - 5^x.$$

Επομένως, λόγω της σχέσης (1) είναι:

$$f'(a) = f'(b).$$

Επειδή $f'(t) = xt^{x-1}$ προκύπτει ότι:

$$xa^{x-1} = xb^{x-1} \Leftrightarrow x\left(\frac{a}{b}\right)^{x-1} = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 1).$$

Οι τιμές 0, 1 ικανοποιούν την εξίσωση, οπότε αυτές είναι και οι μοναδικές ρίζες της. Τονίζουμε ότι είναι απαραίτητο να κάνουμε επαλήθευση, διότι στις τιμές αυτές φτάσαμε με την υπόθεση ότι η εξίσωση έχει λύση, κάτι όμως που δεν είναι απαραίτητο να συμβαίνει. ■

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 12. Αν η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η f' είναι γνησίως μονότονη, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(1 + x - x^2) + f(x^2) = f(1) + f(x).$$

Λυση

Η εξίσωση γράφεται:

$$f(1) + f(x) = f(1 + x - x^2) + f(x^2)$$

$$\Leftrightarrow f(1) - f(1 + x - x^2) = f(x^2) - f(x).$$

Παρατηρούμε ότι προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 1$. Θα αποδείξουμε ότι αυτή είναι και η μοναδική. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις.

- Αν $x > 1$, τότε $1 + x - x^2 < 1 < x < x^2$.

  Από το ΘΜΤ υπάρχουν:

  - $\xi_1 \in (1 + x - x^2, 1)$ τέτοιο, ώστε
  $$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f(1 + x - x^2)}{1 - (1 + x - x^2)} =$$
  $$\frac{f(1) - f(1 + x - x^2)}{x^2 - x}$$
  - $\xi_2 \in (x, x^2)$ τέτοιο, ώστε
  $$f'(\xi_2) = \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x}$$

  Επειδή η f' είναι γνησίως μονότονη και $\xi_1 < \xi_2$, είναι $f'(\xi_1) \neq f'(\xi_2)$, οπότε
  $$\frac{f(1) - f(1 + x - x^2)}{x^2 - x} \neq \frac{f(x^2) - f(x)}{x^2 - x} \Leftrightarrow$$
  $$f(1) - f(1 + x - x^2) \neq f(x^2) - f(x).$$

  Άρα δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης στο διάστημα $(1, +\infty)$.

- Αν $0 < x < 1$, τότε $x^2 < x < 1 < 1 + x - x^2$, τότε εργαζόμαστε τελείως ανάλογα στα διαστήματα $[x^2, x]$, $[1, 1 + x - x^2]$ και καταλήγουμε ότι δεν μπορεί να έχουμε ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. Μοναδική λοιπόν ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 1$. ■

Μεθοδος 5. Υπάρχει μια ειδική κατηγορία εξισώσεων, που έχουν τη γενική μορφή:
$$f(a(x)) + f(b(x)) = f(d(x)) + f(g(x)).$$
Στις εξισώσεις αυτές προσπαθούμε αρχικά να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. Στη συνέχεια, αφού εντοπίσουμε μια ρίζα ρ της δοσμένης εξίσωσης, προσπαθούμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο να αποδείξουμε ότι η εξίσωση δεν έχει άλλη ρίζα. Αυτό το πετυχαίνουμε διακρίνοντας τις περιπτώσεις $x < \rho$, $x > \rho$, συγκρίνοντας τις ποσότητες $a(x), b(x), d(x), g(x)$ κατάλληλα ανά δύο και χρησιμοποιώντας το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης f.

Εφαρμογη 13. Να λυθεί η εξίσωση
$$2^x \ln(2^x + 1) + 4^x \ln(4^x + 1) = 3^x \ln(3^x + 1) + 5^x \ln(5^x + 1).$$

Λυση

Μια προφανής ρίζα είναι η $x = 0$. Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση
$$f(x) = x \ln(x + 1) \text{ , } \mu\varepsilon\ x > -1,$$
τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή:
$$f(2^x) + f(4^x) = f(3^x) + f(5^x)$$
Είναι όμως:
$$f'(x) = \ln(x + 1) + \frac{x}{x + 1} = \ln(x + 1) + 1 - \frac{1}{x + 1}$$
και
$$f''(x) = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{(x + 1)^2} > 0.$$
Είναι $f'(0) = 0$ και η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η f' είναι αρνητική στο διάστημα $(-1, 0)$ και θετική στο $(0, +\infty)$. Η συνάρτηση f είναι λοιπόν γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

- Για $x < 0$ είναι $2^x > 3^x$ και $4^x > 5^x$, οπότε $f(2^x) > f(4^x)$ και $f(4^x) > f(5^x)$, διότι οι αριθμοί $2^x, 3^x, 4^x, 5^x$ ανήκουν στο διάστημα $(0, +\infty)$.Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:
$$f(2^x) + f(4^x) > f(3^x) + f(5^x).$$
- Για $x > 0$ είναι $2^x < 3^x$ και $4^x < 5^x$, οπότε $f(2^x) < f(4^x)$ και $f(4^x) < f(5^x)$, διότι οι αριθμοί $2^x, 3^x, 4^x, 5^x$ ανήκουν επίσης στο διάστημα $(0, +\infty)$.Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:
$$f(2^x) + f(4^x) < f(3^x) + f(5^x).$$

Επομένως η εξίσωση $f(2^x) + f(4^x) = f(3^x) + f(5^x)$ δεν έχει άλλη ρίζα εκτός από την $x = 0$. ■

Μεθοδος 6. Σε ορισμένες περιπτώσεις εντοπίζουμε ρίζες με παρατήρηση, αλλά η μοναδικότητα αυτών των ριζών εξασφαλίζεται μόνο με την εύρεση των διαστημάτων της μονοτονίας. Έτσι, αν η βοηθητική συνάρτηση f αλλάζει μονοτονία μόνο μια φορά και στο καθένα από τα διαστήματα που δημιουργούνται έχουμε ρίζα, τότε η εξίσωση έχει δύο ακριβώς ρίζες και η διαδικασία επίλυσης έχει ολοκληρωθεί.

Εφαρμογη 14. Να λυθεί η εξίσωση
$$4^x = x^4 \text{ , } x > 0$$

Λυση

Δύο προφανείς ρίζες της εξίσωσης είναι οι $x = 2$, $x = 4$. Θα αποδείξουμε ότι αυτές είναι και οι μοναδικές. Λογαριθμίζοντας βλέπουμε ότι εξίσωση παίρνει την ισοδύναμη μορφή $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4}$. Θεωρούμε λοιπόν τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και βρίσκουμε ότι:

- $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x > 0$
- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Έτσι, αφού $2 < e$ και $4 > e$, βλέπουμε ότι:

- Στο διάστημα $(0, e]$ είναι
$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2.$$
- Στο διάστημα $[e, +\infty)$ είναι
$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \Leftrightarrow f(x) = f(4) \Leftrightarrow x = 4.$$

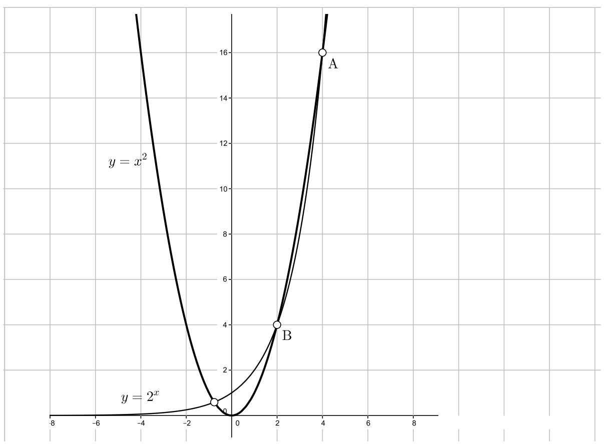
Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι $x = 2$, $x = 4$. ∎

Σχόλιο

Οι συναρτήσεις $f(x) = 4^x$, $g(x) = x^4$ είναι προφανώς κυρτές. Αν τις σχεδιάσει κάποιος κάπως ικανοποιητικά, η διαίσθησή του θα τον οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν δύο ακριβώς κοινά σημεία, οπότε αυτά είναι και τα μοναδικά. Αυτό ωστόσο, είναι γενικά τελείως παραπλανητικό, διότι οι γραφικές παραστάσεις δύο κυρτών (ή κοίλων αντίστοιχα) συναρτήσεων μπορεί να έχουν οσαδήποτε κοινά σημεία, δηλαδή κανένα, ένα, δύο και γενικά n, όπου $n \in \mathbb{N}$.

Οι συγκεκριμένες γραφικές παραστάσεις, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων
$$f(x) = 2^x \ , \ g(x) = x^2$$
έχουν ακριβώς τρία κοινά σημεία. Τα δύο από αυτά έχουν τετμημένες $x = 2$, $x = 4$ και το τρίτο έχει αρνητική τετμημένη που δεν προσδιορίζεται.

Στο παρακάτω διάγραμμα βλέπουμε - για πρακτικούς λόγους - τις γραφικές παραστάσεις των κυρτών συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ *και* $g(x) = x^2$ που έχουν τρία κοινά σημεία. Στο σύνολο των θετικών αριθμών η εξίσωση $2^x = x^2$, όπως προκύπτει από το σχήμα, έχει μόνο δύο λύσεις, τις $x = 2, x = 4$.



Μεθοδος 7. (Εξίσωση με ολοκλήρωμα) Η εξίσωση έχει ή παίρνει συνήθως τη μορφή
$$\int_a^{g(x)} f(t)dt = 0,$$
όπου f είναι συνεχής συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύουμε πρώτα ότι η f είναι θετική (ή αρνητική) στο διάστημα Δ. Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{H}(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in \Delta$ και παρατηρούμε ότι η εξίσωση παίρνει τη μορφή
$$\mathrm{H}(g(x)) = 0 = H(a) \qquad (1).$$
Είναι όμως $H'(x) = f(x) > 0$ (ή $H'(x) = f(x) < 0$), οπότε η συνάρτηση H είναι γνησίως μονότονη. Έτσι η εξίσωση (1) ισοδύναμα γίνεται
$$\mathrm{H}(g(x)) = H(a) \Leftrightarrow g(x) = a.$$
Στη συνέχεια λύνουμε την νέα εξίσωση είτε αλγεβρικά, είτε με τις μεθόδους που περιγράψαμε παραπάνω.

Άλλος τρόπος

Αφού αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο, μπορούμε να εργαστούμε και ως εξής. Ας υποθέσουμε πχ ότι $f(x) > 0$, $x \in \Delta$.

- Αν ήταν $a < g(x)$για κάποιο $x \in \Delta$, τότε θα ήταν και
$$\int_a^{g(x)} f(t)dt > 0,$$
άτοπο.
- Αν ήταν $a > g(x)$ για κάποιο $x \in \Delta$, τότε θα ήταν
$$\int_a^{g(x)} f(t)dt < 0,$$
άτοπο.

Επομένως, αναγκαστικά παίρνουμε:
$$\int_a^{g(x)} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow g(x) = a$$
Ανάλογα εργαζόμαστε αν η συνάρτηση f είναι αρνητική. Επίσης με τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε αν και τα δύο άκρα ολοκλήρωσης είναι μεταβλητά, δηλαδή είναι μη σταθερές συναρτήσεις του x.

Άλλος τρόπος

Σε αρκετές επίσης περιπτώσεις σύντομες λύσεις πετυχαίνουμε με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για το Ολοκλήρωμα. Σύμφωνα με αυτό, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε:
$$\int_a^b f(t)dt = f(c)(b - a).$$
Αν λοιπόν είναι $f(t) \neq 0$ για κάθε $t \in \Delta$, τότε παίρνουμε ότι
$$\int_a^{g(x)} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f(c)(g(x) - a) = 0 \Leftrightarrow g(x) = a.$$

Εφαρμογη 15. Να λύσετε την εξίσωση
$$\int_1^{e^x} \sqrt{t^2+1}\,dt = 0.$$

Λυση

Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$g(x) = \int_1^x \sqrt{t^2+1}\,dt\ ,\ x \in \mathbb{R}.$$
Η g είναι παραγωγίσιμη με:
$$g'(x) = \left(\int_1^x \sqrt{t^2+1}\,dt\right)' = \sqrt{x^2+1} > 0$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση g είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα, άρα και $1-1$. Έτσι η εξίσωση γίνεται:
$$\int_1^{e^x} \sqrt{t^2+1}\,dt = 0 \Leftrightarrow g(e^x) = 0 \Leftrightarrow$$
$$g(e^x) = g(1) \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άλλος τρόπος

Επειδή $\sqrt{t^2+1} > 0$ και επιπλέον η συνάρτηση $h(t) = \sqrt{t^2+1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι $\int_a^b \sqrt{t^2+1}\,dt \neq 0$ για κάθε $a \neq b$ και πιο συγκεκριμένα:

- Αν $a < b$, τότε $\int_a^b \sqrt{t^2+1}\,dt > 0$
- Αν $a > b$, τότε $\int_a^b \sqrt{t^2+1}\,dt < 0$

Σύμφωνα με τα παραπάνω παίρνουμε:
$$\int_1^{e^x} \sqrt{t^2+1}\,dt = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0. \blacksquare$$

Εφαρμογη 16. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και στη συνέχεια ότι είναι γνησίως αύξουσα.
2. Να λύσετε την εξίσωση $\int_1^{2f'(x)} f(u)du = 0$.

Εξετάσεις 2014.

Λυση

1. Είναι $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1 = f(0)$.

   Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Για $x \neq 0$ είναι
   $$f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$
   όπου $h(x) = xe^x - e^x + 1$. Το πρόσημο της h καθορίζει το πρόσημο της f'. Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ με $h'(x) = xe^x$. Επίσης είναι
   $$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$
   - $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
   - $h'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$. Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

   Συνεπώς για $x > 0$ έχουμε
   $$h(x) > h(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0.$$
   Όμοια, για $x < 0$ έχουμε
   $$h(x) > h(0) \Leftrightarrow f'(x) > 0.$$
   Τελικά, αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

2. Θα βρούμε αρχικά την παράγωγο της f στο 0 με τη χρήση του ορισμού.
   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \overset{(\frac{0}{0})}{=}$$
   $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$
   Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \frac{1}{2}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση
   $$F(x) = \int_1^x f(t)dt \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$
   Παρατηρούμε ότι η εξίσωση παίρνει τη μορφή:
   $$F(2f'(x)) = F(1)\ \ (1)$$
   Αλλά $F'(x) = \left(\int_1^x f(t)dt\right)' = f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η F είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1 - 1. Η εξίσωση λοιπόν (1) γίνεται ισοδύναμα:
   $$F(2f'(x)) = F(1) \Leftrightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow$$
   $$f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) = f'(0)$$
   Όπως στο πρώτο ερώτημα προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. Έτσι, η f', ως γνησίως αύξουσα, είναι και $1-1$, οπότε παίρνουμε:
   $$f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow x = 0.$$

Να σημειώσουμε ότι αντί της συγκεκριμένης αρχικής, μπορούμε να θεωρήσουμε τυχαία αρχική F της f και να εργαστούμε εντελώς ανάλογα.

Άλλος τρόπος

Παρατηρούμε ότι η $x = 0$ είναι προφανής λύση της δοσμένης εξίσωσης αφού για $x = 0$ το πρώτο μέλος είναι ίσο με

$$\int_1^{2\cdot\frac{1}{2}} f(u)du = \int_1^1 f(u)du = 0.$$

- Για $x > 0$ είναι $e^x > 1$ $\;και\;$ $\frac{e^x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$,ενώ για $x < 0$ είναι $e^x < 1$ $\;και\;$ $\frac{e^x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$
- Για $x = 0$ έχουμε $f(0) = 1 > 0$.

Αφού η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα. Συνεπώς, για $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) \Leftrightarrow 2f'(x) > 1$ και αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, παίρνουμε

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)du > 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχουν λύσεις της δοσμένης εξίσωσης για $x > 0$. Όμοια, για $x < 0$, είναι $f'(x) < f'(0) \Leftrightarrow 2f'(x) < 1$ και αφού $f(x) > 0$ για κάθε $x < 0$ προκύπτει ότι:

$$\int_{2f'(x)}^1 f(u)du > 0 \Leftrightarrow \int_1^{2f'(x)} f(u)du < 0.$$

Συνεπώς δεν υπάρχουν λύσεις της δοσμένης εξίσωσης για $x < 0$. Άρα η μοναδική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι η $x = 0$. ■

Εφαρμογη 17. Αν $\alpha > 1$, η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή και $f(1) = 1$, να λύσετε την εξίσωση

$$(a-1)\int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt = (f(a)-1)(x-a), \quad x > 1$$

Λυση

Προφανής ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = \alpha$. Θα αποδείξουμε ότι είναι η μοναδική. Έστω ότι υπάρχει και άλλη ρίζα $x \neq \alpha$ με $x > 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_\alpha^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt\ , x > 1.$$

Είναι $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$ και

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1)-f(x)+1}{(x-1)^2} = \frac{f'(x)(x-1)-(f(x)-f(1))}{(x-1)^2} =$$
$$= \frac{f'(x)(x-1)-f'(\xi)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1} > 0$$

Η συνάρτηση g είναι λοιπόν κυρτή. Έτσι, η εξίσωση γράφεται:

$$(a-1)\int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1}dt = (f(a)-1)(x-a) \Leftrightarrow$$
$$(a-1)\,g(x) = (f(a)-1)(x-a) \Leftrightarrow$$
$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{f(a)-1}{a-1} \Leftrightarrow$$
$$g\prime(x_0) = g'(a) \Leftrightarrow$$
$$x_0 = a$$

διότι η g', ως γνησίως αύξουσα είναι και $1-1$.Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού το x_0 βρίσκεται από το ΘΜΤ ανάμεσα στα α και x.■

Σχόλια

1. Μπορούμε επίσης να βασιστούμε στην ιδιότητα της εφαπτομένης μιας κυρτής συνάρτησης. Έτσι, αφού η γραφική παράσταση της g, με εξαίρεση το σημείο επαφής βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη, για κάθε $1 < x \neq \alpha$ ισχύει ότι $g(x) > g(\alpha) + g'(\alpha)(x-\alpha)$ (1) Πράγματι, αφού η g είναι κυρτή και η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της με τετμημένη α είναι $y-g(\alpha) = g'(\alpha)(x-\alpha)$, προκύπτει η σχέση (1).
2. Παρόμοια λύση μπορούμε να πετύχουμε αν μελετήσουμε τη συνάρτηση της διαφοράς.

Εφαρμογη 18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $\int_1^x f(t)dt + \int_1^{x^3} f(t)dt = \int_1^{x^5} f(t)dt + \int_1^{x^7} f(t)dt$
2. $\int_0^x f(t)dt + \int_0^{2x} f(t)dt = \int_0^{3x} f(t)dt + \int_0^{4x} f(t)dt$

Λυση

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_1^x f(t)dt \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή

$$g'(x) = (\int_1^x f(t)dt)' = f(x) > 0,$$

η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα. Η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$g(x) + g(x^3) = g(x^5) + g(x^7) \quad (1)$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι οι τιμές $x = 0, x = 1, x = -1$ είναι λύσεις της εξίσωσης. Θα αποδείξουμε ότι οι λύσεις αυτές είναι οι μοναδικές.

- Με $x > 1$ είναι

$$x < x^5 \text{ και } x^3 < x^7.$$

Επομένως:

$$g(x) < g(x^5\ ) \text{ και } \ g(x^3) < g(x^7).$$

Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν

$$g(x) + g(x^3) < g(x^5\ ) + g(x^7)$$

που σημαίνει ότι κανένας αριθμός $x > 1$ δεν επαληθεύει την εξίσωση (1).

- Με $0 < x < 1$ είναι

$$x > x^5 \quad \text{και} \quad x^3 > x^7.$$

Επομένως, εντελώς ανάλογα παίρνουμε:

$$g(x) > g(x^5\ ) \ \textit{και} \ g(x^3) > g(x^7).$$

Αυτές με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$g(x) + g(x^3) > g(x^5\ ) + g(x^7)$$

που σημαίνει ότι κανένας αριθμός x , *με* $0 < x < 1$ δεν επαληθεύει την εξίσωση (1).

- Με $-1 < x < 0$ ή με $x < -1$ εργαζόμαστε εντελώς ανάλογα. Σημειώνουμε ότι στην πρώτη περίπτωση θα είναι

$$x < x^5 \quad \text{και} \quad x^3 < x^7$$

ενώ στη δεύτερη

$$x > x^5 \quad \text{και} \quad x^3 > x^7.$$

Τελικά, οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης είναι οι

$$x = 0, \ x = 1, \ x = -1.$$

2. Θέτουμε, αντίστοιχα με το ερώτημα 1.

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

και η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$g(x) + g(2x) = g(3x) + g(4x)$$

Προφανής ρίζα είναι η $x = 0$. Διακρίνοντας τις περιπτώσεις

$$x > 0 \ \text{ ή } \ x < 0$$

έχουμε αντίστοιχα ότι:

- $x < 3x, \ 2x < 4x$. Επομένως:

$$g(x) < g(3x) \ \text{ και } \ g(2x) < g(4x).$$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν

$$g(x) + g(2x) < g(3x) + g(4x),$$

που σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει θετικές ρίζες.

- $x > 3x$, $2x > 4x$. Επομένως:

$$g(x) > g(3x) \text{ και } g(2x) > g(4x)$$

Αυτές με πρόσθεση δίνουν

$$g(x) + g(2x) > g(3x) + g(4x),$$

που σημαίνει ότι η εξίσωση δεν έχει αρνητικές ρίζες.

Άρα η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 0$. ■

Σημείωση

Ο τρόπος αυτός εφαρμόζεται για κάθε συνεχή συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ.

Εφαρμογές στις εξισώσεις. Ασκήσεις για εξάσκηση.

ΑΣΚΗΣΗ 1. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα

$$f(3 - x) + f(x + 5) = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. και είναι γνησίως φθίνουσα. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

Υποδειξη

Για $x = -1$ παίρνουμε $f(4) = 0$, οπότε μια λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι η $x = 4$. Επειδή όμως η f είναι γνησίως μονότονη, η λύση αυτή είναι μοναδική. Άρα $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

ΑΣΚΗΣΗ 2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1$.

1. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
2. Να λυθεί η εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$
3. Να λυθεί η ανίσωση $3^x + 4^x > 5^x$.

Υποδειξη

1. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$. Έστω $x_1 < x_2$. Επειδή $0 < \frac{3}{5} < 1$ *και* $0 < \frac{4}{5} < 1$, παίρνουμε ότι:
   - $\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2}$ *και* $\left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} > \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2}$
   - $\left(\frac{3}{5}\right)^{x_1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_1} - 1 \ > \ \left(\frac{3}{5}\right)^{x_2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{x_2} - 1$, δηλαδή $f(x_1) > f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Η μονοτονία μπορεί να βρεθεί ευκολότερα με την παράγωγο.

2. Είναι:
$$3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$
Παρατηρούμε όμως ότι:
$$f(2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{9+16}{25} - 1 = 0$$
οπότε η $x = 2$ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως μονότονη, η ρίζα $x = 2$ είναι η μοναδική. Άρα η μοναδική λύση της δοσμένης εξίσωσης είναι η $x = 2$.

3. Είναι: $3^x + 4^x > 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2 \Leftrightarrow x < 2$

Εφαρμογή

Να λύσετε την εξίσωση
$$5^x + 12^x = 13^x.$$

Υποδειξη

Η εξίσωση, αφού διαιρέσουμε πρώτα όλους τους όρους με 13^x, γράφεται στη μορφή:
$$\left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^{\mathrm{x}} - 11 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0,$$
με
$$f(x) = \left(\frac{5}{13}\right)^x + \left(\frac{12}{13}\right)^x - 1.$$
Μοναδική ρίζα είναι τελικά η $x = 2$.

Ασκηση 3. Δίνεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα
$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{για κάθε } x,\ y \neq 0.$$
Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, τότε:

1. Να αποδειχθεί ότι ορίζεται η f^{-1}.

2. Να λυθεί η εξίσωση
$$f(x) + f\left(x^2 + 3\right) = f\left(x^2 + 1\right) + f(x + 1$$

3. Αν επιπλέον είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 1$, να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Υποδειξη

1. Έστω $\alpha, \beta \neq 0$ με $f(\alpha) = f(\beta)$. Τότε:
$$f(\alpha) - f(\beta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 0 \qquad (1)$$
Αλλά η δοσμένη σχέση για $x = y = 1$ δίνει:
$$f(1) - f(1) = f(1) \Leftrightarrow f(1) = 0.$$
Επειδή η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, αυτή θα είναι η $x = 1$. Άρα η (1) δίνει: $\frac{\alpha}{\beta} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta$
Επομένως η f είναι 1-1, οπότε ορίζεται η f^{-1}.

2. Είναι:
$$f(x) + f(x^2 + 3) = f(x^2 + 1) + f(x + 1) \Leftrightarrow$$
$$f(x) - f(x^2 + 1) = f(x + 1) - f(x^2 + 3) \Leftrightarrow$$
$$f\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) = f\left(\frac{x + 1}{x^2 + 3}\right) \overset{f:\,1\text{-}1}{\Leftrightarrow}$$
$$\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{x + 1}{x^2 + 3} \quad \Leftrightarrow$$
$$x^3 + 3x = x^3 + x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
η οποία είναι δεκτή.

3. Έστω $\alpha, \beta > 0$ με $\alpha < \beta$. Θα αποδείξουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Είναι:
$$f(\beta) - f(\alpha) = f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) > 0,$$
διότι $\frac{\beta}{\alpha} > 1$. Άρα $f(\alpha) < f(\beta)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Ασκηση 4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x + 1$.

1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

2. Να λύσετε την εξίσωση
$$e^{x^2 - x} + (x^2 - x)^3 + x^2 - 2x = e^{x+3} + (x + 3)^3 + 3.$$

Ασκηση 5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $\left(2^{x^2} + x^2 + 1\right)^3 + 2^{x^2} + x^2 + 1 = (2^{x+2} + x + 3)^3 + 4\cdot 2^x + x + 3$

2. $\left(e^{x-1} + x - 3\right)^5 + \left(e^{x-1} + x - 3\right)^3 + e^{x-1} + x = 0$

Ασκηση 6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x\ln x - x^2 + 1$.

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού A της f, η $f'(x)$ και η $f''(x)$.

2. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημο της f.

3. Να λυθεί η εξίσωση $2\ln x = \frac{x^2 - 1}{x}$.

4. Αν $0 < x \neq 1$, να αποδειχθεί ότι $\frac{x\ln x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$.

Υποδειξη

1. Πρέπει $x > 0$, οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι $A = (0, +\infty)$. Επιπλέον:
   - $f'(x) = \left(2x\ln x - x^2 + 1\right)' = 2\ln x + 2 - 2x$, $x > 0$.
   - $f''(x) = (2lnx + 2 - 2x)' = \frac{2}{x} - 2 = \frac{2(1-x)}{x}$
2. Για να μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία, πρέπει να βρούμε το πρόσημο της f'. Όμως η εξίσωση $f'(x) = 0$ δεν λύνεται με αλγεβρικές μεθόδους. Για τον λόγο αυτό εκμεταλλευόμαστε το πρόσημο της f''. Όλη αυτή η διαδικασία ενσωματώνεται στον πίνακα προσήμου. Στο $(0,1)$ είναι $f''(x) > 0$ και στο $(1,+\infty)$ είναι $f''(x) < 0$. Επομένως η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$. Από τη μονοτονία της f' και από το γεγονός ότι $f'(1) = 0$ παίρνουμε ότι: για $x < 1$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0$ και για $x > 1$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ (αφού είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$). Ακόμα είναι:
   - $x < 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 0$
   - $x > 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow f(x) < 0$

   Επομένως η f είναι θετική στο $(0,1)$ και αρνητική στο $(1,+\infty)$.
3. Η πρώτη ενέργεια είναι να συσχετίσουμε τη δοσμένη εξίσωση με την f. Είναι όμως:
   $$\ln x = \frac{x^2-1}{2x} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2x\ln x = x^2 - 1 \Leftrightarrow$$
   $$2x\ln x - x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$
   Όμως $f(1) = 0$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη, το $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της f. Άρα και η μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 1$.
4. Η f είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε:
   - $$\begin{gathered} x > 1 \Leftrightarrow f(x) < f(1) \Leftrightarrow \\ 2x\ln x - x^2 + 1 < 0 \Leftrightarrow \\ 2x\ln x < x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{x\ln x}{x^2} - 1 < \frac{1}{2}, \end{gathered}$$
     αφού $x^2 - 1 > 0$ στο $(1,+\infty)$.
   - $$\begin{gathered} x < 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \\ \Leftrightarrow 2x\ln x - x^2 + 1 > 0 \\ \Leftrightarrow 2xlnx > x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{xlnx}{x^2-1} < \frac{1}{2} \end{gathered}$$
     αφού $x^2 - 1 < 0$ στο $(0,1)$.

   Επομένως: $\frac{x\ln x}{x^2-1} < \frac{1}{2}$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

Ασκηση 7. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = (x+1)e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1.$$

1. Να βρείτε την f' .
2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
3. Να εξετάσετε αν η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
4. Να λύσετε την εξίσωση
   $$xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 = 1.$$

Ασκηση 8. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = (x+1)\ln x - 2(x-1).$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f, την f' και τηνf''.
2. Να βρείτε τη μονοτονία της f'.
3. Να λύσετε την εξίσωση $f'(x) = 0$.
4. Να βρείτε τη μονοτονία της f
5. Να λύσετε την εξίσωση
   $$(x+1)\ln x = 2(x-1).$$

Ασκηση 9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $e^x + x^2 = x + 1$
2. $e^x = 1 + \ln(x+1)$

Ασκηση 10. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x - 1$ και $g(x) = x - x^2$ έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και κοινή εφαπτομένη στο σημείο αυτό.

Ασκηση 11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $3^x + 4^x = 5^x$
2. $5^x + 12^x = 13^x$
3. $3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x = 3 \cdot 6^x$
4. $2 \cdot 5^x + 5 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x = 0$

Ασκηση 12. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

1. $2e^x + e^{-2x} = 1 + 2e^{-x} + 2xe^{-x}$
2. $e^x\left(x + 1 + \ln(x^2+1)\right) = 1$
3. $2^x + 3^x + 4^x = 9^x$
4. $6x^2\ln x = 2x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

Ασκηση 13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

1. $x^4 - 12x^2 + 24 - 24\sigma\upsilon\nu x = 0$

2. $x^5 - 20x^3 + 120x = 120\eta\mu x$

3. $2e^x = 2 + 2x + x^2$

4. $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

ΑΣΚΗΣΗ 14. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2(6\ln x - 1) - x^3 - 2$$

και

$$g(x) = x^3 + 2x^2 - 6x - 1,$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

ΑΣΚΗΣΗ 15. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \alpha^x - x,\ \ 0 < \alpha < 1.$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2. Να λύσετε την εξίσωση

$$\alpha^{x^2-4} - \alpha^{x-2} = x^2 - x - 2.$$

ΑΣΚΗΣΗ 16. Αν $x > 0$ και $\alpha > 1$, να λύσετε την εξίσωση

$$x^x = \alpha^{x+\alpha^2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 17. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = (1-x)\ln x + \frac{1}{x} + x - 2.$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2. Να λύσετε την εξίσωση $(x - x^2)\ln x + x^2 = 2x - 1$.

3. Να βρείτε το πρόσημο της f.

ΑΣΚΗΣΗ 18. 1. Να αποδείξετε ότι

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2. Να λύσετε την εξίσωση $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} = e^x$.

ΑΣΚΗΣΗ 19. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\ln x}{x},$$

όπου $x > 0$.

1. Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς τη μονοτονία.

2. Να λύσετε την εξίσωση $2^x = x^2$, με $x > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 20. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2\ln x + x^2 - 1.$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x^2) = f(x^5) + f(x^{10})$$

3. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $(\frac{\alpha}{\beta})^2 = e^{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta$.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

1. Είναι γνησίως αύξουσα.

2. Το $x = 1$ είναι προφανής λύση.
   - Αν $x > 1$, τότε $x < x^2,\ x^5 < x^{10}$ και έτσι τελικά $f(x) + f(x^2) < f(x^5) + f(x^{10})$.
   - Αν $0 < x < 1$, τότε $x > x^2$ και $x^5 > x^{10}$, οπότε τελικά $f(x) + f\left(x^2\right) > f\left(x^5\right) + f\left(x^{10}\right)$.

3. Λογαριθμίζουμε και γίνεται ισοδύναμη με την $f(\alpha) = f(\beta)$ κλπ

ΑΣΚΗΣΗ 21. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.

2. Να λύσετε την εξίσωση $x^4 = 4^x$ με $x > 0$.

Επαναληπτικές Εξετάσεις 2014.

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

1. Η f είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα στο $[0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

2. Η εξίσωση γράφεται $f(x) = f(4)$.
   - Με $x > e$ είναι $f(x) = f(4) \Leftrightarrow x = 4$
   - Με $0 < x \leq e$ είναι $f(x) = f(4) \Leftrightarrow f(x) = f(2) \Leftrightarrow x = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 22. Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
- $f(1) = 1$.
- $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$.

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{f(t)-1}{t-1}dt, \quad x \in (1,+\infty) \text{ και } \alpha > 1.$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $f'(1) = 0$ καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

2. Η g είναι γνησίως αύξουσα και στη συνέχεια να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du$$

3. Η g είναι κυρτή και ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x} \frac{f(t)-1}{t-1}dt = (f(\alpha)-1)(x-\alpha), \ x > 1,$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Εξετάσεις 2013.

Άσκηση 23. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 3x(2\ln x - 1) - 4, \ x > 0$$

1. Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα.

2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, να βρείτε το σύνολο τιμών και το πρόσημό της.

3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

4. Να βρείτε τους θετικούς αριθμούςa, b, c, αν ισχύει η σχέση $a^2 + b^2 + c^2 = 2\ln(abc) + 3$.

5. Να λύστε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^4).$$

Άσκηση 24. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1, \ x \in \mathbb{R}.$$

1. (α′) Να αποδείξετε ότι συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

   (β′) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

3. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και στη συνέχεια, να λύσετε στο διάστημα $(0, 1]$ την εξίσωση

$$\int_1^x f(t)dt = x - 1.$$