Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το LaTeX 2_ε
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com

Εκθέτης
Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας
Φυλλο 11, 27 Απριλιου 2012

Ιστορικές, μαθηματικές και διδακτικές προεκτάσεις μιας άσκησης από την κλασική σχολική Άλγεβρα.

Γιάννης Θωμαΐδης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

1 Εισαγωγή

Σ΄ ένα από τα τελευταία τεύχη του μαθητικού περιοδικού *Ευκλείδης Β΄* (Νο 82, Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2011, σελ. 25) δημοσιεύτηκε η ακόλουθη άσκηση:

> Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$. Εάν $|\alpha+\beta+\gamma|<|\alpha|$ να δείξετε ότι η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον ρίζα μεταξύ 0 και 2.

Η συγκεκριμένη άσκηση προέρχεται από τον «σκληρό πυρήνα» της παραδοσιακής ασκησιολογίας του δευτεροβάθμιου τριωνύμου και των απολύτων τιμών και η επίλυσή της στον *Ευκλείδη Β΄* ακολουθεί τη σχετική «μεθοδολογία». Με τη βοήθεια των τύπων του Viéte η δοθείσα σχέση των συντελεστών της εξίσωσης μετασχηματίζεται σε μία σχέση μεταξύ των ριζών από την οποία συνάγεται το ζητούμενο. Αντιγράφουμε τη λύση της άσκησης όπως ακριβώς παρουσιάστηκε στον *Ευκλείδη Β΄*:

Έχουμε:

$$|\alpha+\beta+\gamma|<|\alpha|\overset{|\alpha|>0}{\Rightarrow}$$
$$\frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{|\alpha|}<1\Rightarrow$$
$$\left|\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}\right|<1\Rightarrow$$
$$\left|1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}\right|<1\Rightarrow$$
$$|1-(\rho_1+\rho_2)+\rho_1\rho_2|<1\Rightarrow$$
$$|1-\rho_1-\rho_2+\rho_1\rho_2|<1\Rightarrow$$

$$|(1-\rho_1)-\rho_2(1-\rho_1)|<1\Rightarrow$$
$$|(1-\rho_1)(1-\rho_2)|<1\Rightarrow$$
$$|1-\rho_1||1-\rho_2|<1\Rightarrow$$

$|1-\rho_1|<1 \quad (1) \quad$ ή $\quad |1-\rho_2|<1 \quad (2)$.
$(1)\Rightarrow -1<1-\rho_1<1\Rightarrow -2<-\rho_1<0\Rightarrow 2>\rho_1>0$.
Ομοίως $(2)\Rightarrow 2>\rho_2>0$

Τα προηγούμενα εγείρουν αρχικά δύο ενστάσεις μαθηματικού περιεχομένου:
Κανένα στοιχείο στα δεδομένα της άσκησης δεν εξασφαλίζει ότι η εξίσωση έχει τις πραγματικές ρίζες ρ_1 και ρ_2 που εμφανίζονται στην πορεία της απόδειξης. Π.χ., οι συντελεστές της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $4x^2-2x+1=0$ ικανοποιούν την υπόθεση $|\alpha+\beta+\gamma|<|\alpha|$ αλλά η συγκεκριμένη εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. Θα πρέπει λοιπόν να προστεθεί στα δεδομένα ως υπόθεση η ύπαρξη πραγματικών ριζών ή κάποια συνθήκη που την εξασφαλίζει (π.χ. $|\rho_1|\neq|\rho_2|$). Αντίθετα, η υπόθεση $\alpha\neq 0$ που δίνεται είναι περιττή επειδή προκύπτει άμεσα από τη δοθείσα σχέση $|\alpha+\beta+\gamma|<|\alpha|$.

Κρίνοντας τώρα τα γραφόμενα από διδακτική άποψη εγείρονται ενστάσεις άλλου είδους:
Ο τρόπος που εκτίθεται η λύση της άσκησης σ΄ ένα περιοδικό για μαθητές του Λυκείου δεν απέχει πολύ από τη μηχανική εφαρμογή μιας αλγοριθμικής διαδικασίας, από την οποία απουσιάζει όχι μόνο η ακριβολογία που πρέπει να χαρακτηρίζει τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο επίπεδο του Λυκείου, αλλά και η διαύγεια. Ποια σκοπιμότητα εξυπηρετεί η συρρίκνωση της φυσικής γλώσσας στη χρήση δύο μόνο λέξεων, των «Έχουμε» και «Ομοίως»;

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι για τους μαθητές της Α΄ Λυκείου (στους οποίους απευθύνεται η άσκηση) θα είχε ίσως μεγαλύτερη διδακτική αξία η οργάνωση μιας δραστηριότητας, με αντικείμενο τη μελέτη της προηγούμενης απόδειξης και στόχο να εντοπιστούν και να αποκατασταθούν τα δύο προβληματικά σημεία που αναφέρθηκαν. Δραστηριότητες αυτού του είδους αποτελούν ίσως το μόνο τρόπο καταπολέμησης της άκριτης εφαρμογής τεχνικών, τύπων και «μεθοδολογίας» που κυριαρχεί σήμερα στη διδασκαλία των Μαθηματικών και συμβάλει ευθέως στην υποβάθμισή της.

Η συγκεκριμένη άσκηση όμως περικλείει ιδιαίτερη μαθηματική και διδακτική δυναμική και έχει μια ενδιαφέρουσα ιστορία, που ανάγεται σε «ένδοξες» εποχές της νεοελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Με αφορμή λοιπόν τη δημοσίευσή της στον Ευκλείδη θα παρουσιάσουμε κάποια στοιχεία αυτής της ιστορίας και θα σκιαγραφήσουμε ορισμένες μαθηματικές και διδακτικές προεκτάσεις.

2 Μερικά στοιχεία από την ιστορία της άσκησης

Η άσκηση πρωτοεμφανίστηκε στην ελληνική βιβλιογραφία το 1955, σ΄ ένα μικρό βιβλίο που εκδόθηκε στην Αθήνα και έφερε τον τίτλο *Γενικαί Ασκήσεις Αλγέβρας των Απολύτων Τιμών και Ανισοτικών Συστημάτων*. Συγγραφέας του βιβλίου ήταν ένας σημαντικός δάσκαλος - φροντιστής εκείνης της εποχής, ο μαθηματικός Βάσος Σαββαΐδης. Η άσκηση, η οποία ανήκει στις προτεινόμενες προς λύση, διατυπώνεται στο βιβλίο με διαφορετική υπόθεση αλλά με το ίδιο συμπέρασμα, ως εξής (σελ. 65):

> Δίδεται η με πραγματικούς συντελεστάς εξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ όπου υποτίθεται
>
> $$|\alpha(\beta-\gamma)|>\left|\beta^2-\alpha\gamma\right|+\left|\gamma^2-\alpha\beta\right|\,(1)$$
>
> Αν αι ρίζαι της εξισώσεως είναι πραγματικαί δείξατε ότι μία τουλάχιστον ρίζα ρ αυτής πληροί την ανισότητα $0<\rho<2$.

Είναι χαρακτηριστικό ότι στον πρόλογο του βιβλίου του ο Β. Σαββαΐδης διεκδικεί την πατρότητα της συγκεκριμένης άσκησης (και πολλών άλλων παρόμοιων) και απαγορεύει ρητά την αναδημοσίευσή της![1]

Όπως βλέπουμε, στη διατύπωση δεν υπάρχει το περιττό δεδομένο $\alpha \neq 0$, αλλά γίνεται η απαραίτητη - σύμφωνα με το ζητούμενο - υπόθεση ότι οι ρίζες είναι πραγματικές.

Ας επιχειρήσουμε τώρα να εφαρμόσουμε τη σχετική «μεθοδολογία» μετασχηματισμού της σχέσης των συντελεστών σε αντίστοιχη σχέση των ριζών.

Αν ονομάσουμε ρ_1, ρ_2 τις ρίζες της εξίσωσης και διαιρέσουμε τα μέλη της ανισότητας (1) με τον θετικό αριθμό α^2 βρίσκουμε διαδοχικά:

$$|\alpha(\beta-\gamma)| > \left|\beta^2-\alpha\gamma\right| + \left|\gamma^2-\alpha\beta\right| \Rightarrow$$

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\gamma}{\alpha}\right| > \left|\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}\right| + \left|\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-\frac{\beta}{\alpha}\right| \Rightarrow$$

$$|-(\rho_1+\rho_2)-\rho_1\rho_2| > \left|(\rho_1+\rho_2)^2-\rho_1\rho_2\right| + \left|(\rho_1\rho_2)^2+\rho_1+\rho_2\right| \Rightarrow$$

$$|\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2| > \left|\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_1\rho_2\right| + \left|\rho_1^2\rho_2^2+\rho_1+\rho_2\right|$$

Από την τελευταία σχέση δεν φαίνεται με ποιο τρόπο θα μπορούσε να φτάσει κανείς στη ζητούμενη ανισότητα $0 < \rho_1 < 2$ ή $0 < \rho_2 < 2$. Προσπαθώντας να εξάγουμε κάποιο χρήσιμο συμπέρασμα, παρατηρούμε ότι αν και οι δύο ρίζες της εξίσωσης ήταν θετικές, τότε από τη σχέση αυτή προκύπτει

$$\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2 > \rho_1^2+\rho_2^2+\rho_1\rho_2+\rho_1^2\rho_2^2+\rho_1+\rho_2$$

δηλαδή

$$\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_1^2\rho_2^2 < 0$$

που είναι άτοπο. Άρα εκείνο που συνάγεται μέχρι στιγμής από την ανισότητα (1) είναι ότι μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης θα είναι αρνητικός αριθμός.

Για να αποδείξουμε λοιπόν το ζητούμενο θα πρέπει να αναζητήσουμε κάποιο διαφορετικό μετασχηματισμό της (1). Λαμβάνοντας υπόψη (βλέπε παραπάνω την απόδειξη της άσκησης στον Ευκλείδη) ότι ισχύει η συνεπαγωγή

$$|\alpha+\beta+\gamma| < |\alpha| \Rightarrow |1-\rho_1|\,|1-\rho_2| < 1 \quad (2)$$

είναι φανερό ότι πριν από τη διαίρεση με το α για τη δημιουργία των τύπων του Viéte, απαιτείται κάποιος μετασχηματισμός που οδηγεί σε απλοποίηση της ανισότητας (1). Στο σημείο αυτό ακριβώς βρίσκεται και η ουσιαστική δυσκολία της άσκησης που πρότεινε ο Β. Σαββαΐδης το 1955. Ο λογισμός των απολύτων τιμών μας δίνει τα μέσα να μετασχηματίσουμε την (1) ελαττώνοντας το μικρότερο δεξιό μέλος, σύμφωνα με τις ιδιότητες

$$|x|+|y| \geq |x+y|$$

και

$$|x|+|y| \geq |x-y|$$

Η αξιοποίηση της δεύτερης ανισότητας μας οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα:

$$|\alpha(\beta-\gamma)| > \left|\beta^2-\alpha\gamma\right| + \left|\gamma^2-\alpha\beta\right| \Rightarrow$$

$$|\alpha(\beta-\gamma)| > \left|\beta^2-\alpha\gamma-\gamma^2+\alpha\beta\right| \Rightarrow$$

$$|\alpha(\beta-\gamma)| > |(\beta-\gamma)(\beta+\gamma)+\alpha(\beta-\gamma)| \Rightarrow$$

$$|\alpha(\beta-\gamma)| > |(\beta-\gamma)(\beta+\gamma+\alpha)| \Rightarrow$$

$$|\alpha|\,|\beta-\gamma| > |\beta-\gamma|\,|\alpha+\beta+\gamma| \Rightarrow$$

$$|\alpha| > |\alpha+\beta+\gamma|$$

(επειδή, όπως εύκολα προκύπτει από την (1), είναι $\beta \neq \gamma$ και άρα $|\beta-\gamma| > 0$) Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η ανισότητα (1) συνεπάγεται την ανισότητα

$$|\alpha+\beta+\gamma| < |\alpha|,$$

από την οποία, όπως έχουμε διαπιστώσει, προκύπτει μέσω της (2) ότι μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης ανήκει στο διάστημα $(0,2)$. Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

- Η άσκηση που δημοσιεύτηκε το 2011 στον Ευκλείδη αποτελεί μια απλοποιημένη εκδοχή εκείνης που είχε δημοσιευθεί το 1955 (η υπόθεση $|\alpha(\beta-\gamma)| > \left|\beta^2-\alpha\gamma\right| + \left|\gamma^2-\alpha\beta\right|$ αντικαταστάθηκε από μια συνέπειά της, την $|\alpha| > |\alpha+\beta+\gamma|$).
- Αναζητώντας τις συνέπειες της ανισότητας (1) διαπιστώσαμε προηγουμένως ότι μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ θα είναι αρνητικός αριθμός. Άρα στην αρχική διατύπωση του Β. Σαββαΐδη, το συμπέρασμα «μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης ανήκει στο διάστημα (0, 2)» μπορεί να αντικατασταθεί από το ισχυρότερο «μία και μόνο μία ρίζα της εξίσωσης ανήκει στο διάστημα $(0,2)$».

Στα 56 χρόνια που μεσολάβησαν από το 1955 μέχρι το 2011, και παρά τη ρητή απαγόρευση του δημιουργού της, η προηγούμενη άσκηση αναδημοσιεύθηκε στα περισσότερα φροντιστηριακά βιβλία Άλγεβρας και στις διάφορες μονογραφίες με θέμα το *Τριώνυμο* ή τις *Απόλυτες Τιμές*.

Ο σπουδαίος μαθηματικός και φροντιστής Σπύρος Κανέλλος, στο δεύτερο τόμο του βιβλίου του *Μαθήματα Αλγέβρας* (1η έκδοση 1956, 2η έκδοση, 1958), προτείνει δύο μορφές της άσκησης. Αρχικά στο κεφάλαιο II *Το δευτεροβάθμιον τριώνυμον* και συγκεκριμένα στις ασκήσεις της ενότητας *Άθροισμα και γινόμενον των ριζών της δευτεροβαθμίου εξισώσεως* (σελ. 18), προτείνεται προς λύση η απλοποιημένη εκδοχή:

> Εάν μεταξύ των (πραγματικών) συντελεστών α, β, γ της δευτεροβαθμίου εξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$ υφίσταται η ανισότης
>
> $$|\alpha| > |\alpha+\beta+\gamma|$$
>
> τότε αν η εξίσωσις έχει πραγματικάς ρίζας ρ_1, ρ_2 η μία τουλάχιστον τούτων περιέχεται μεταξύ 0 και 2.

[1] Τις δεκαετίες του 1950 και 1960 οι «Απόλυτες Τιμές» αποτελούσαν σημείο αιχμής της εξεταστέας ύλης Μαθηματικών στις εισαγωγικές εξετάσεις των Α.Ε.Ι. (ιδιαίτερα του Πολυτεχνείου), επειδή οι αντίστοιχοι καθηγητές - θεματοδότες χρησιμοποιούσαν συχνά ως μέθοδο παραγωγής πρωτότυπων θεμάτων την «επένδυση» κλασικών ασκήσεων (εξισώσεις, ανισώσεις, ανισότητες, τριώνυμο κτλ) με την έννοια και το σύμβολο της απόλυτης τιμής. Το γεγονός αυτό είχε προκαλέσει στους φροντιστές της εποχής μια φρενίτιδα ανταγωνισμού στην αναζήτηση και παραγωγή παρόμοιων ασκήσεων, με αποτέλεσμα να κυκλοφορούν εκείνη την περίοδο στην Ελλάδα περισσότερες από 10 πολυσέλιδες μονογραφίες που είχαν αποκλειστικό θέμα τις Απόλυτες Τιμές! (φαινόμενο μοναδικό στη διεθνή βιβλιογραφία). Συνέβαινε μάλιστα συχνά να επικαλούνται οι συγγραφείς δικαιώματα πνευματικής ιδιοκτησίας και να απαγορεύουν την αναδημοσίευση των ασκήσεων που είχαν επινοήσει. Λεπτομερής μελέτη του ζητήματος γίνεται στο (Θωμαΐδης 1995, σελ. 201-221). Για τη μεγάλη εκτίμηση που έχαιρε ο Βάσος Σαββαΐδης από τη μαθηματική και εκπαιδευτική κοινότητα της εποχής, παραπέμπουμε σε όσα αναφέρουν σχετικά οι Σ. Ζερβός (1999, σελ. 19), Θ. Καζαντζής (1999, σελ. 29-30) και Λ. Τσίλογλου (2007, σελ. 137).

Στο ίδιο κεφάλαιο, στις ασκήσεις της ενότητας *Διάφοροι εφαρμογαί της θεωρίας του τριωνύμου* (σελ. 43) προτείνεται προς λύση η αρχική άσκηση, αλλά με το ισχυρότερο συμπέρασμα:

> Εάν μεταξύ των πραγματικών αριθμών α, β, γ πληρούται η ανισότης
> $$|\alpha(\beta-\gamma)| > |\beta^2-\alpha\gamma| + |\gamma^2-\alpha\beta|$$
> αι δε ρίζαι της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ είναι πραγματικαί, τότε η μία και μόνον η μία ρίζα θα περιέχεται μεταξύ 0 και 2.

Οι δύο αυτές ασκήσεις περιλαμβάνονται επίσης στις ίδιες ενότητες του δεύτερου τόμου του βιβλίου του Σ. Κανέλλου *Άλγεβρα δια τα Λύκεια*, (1η έκδοση 1966, 2η έκδοση 1970: σελ. 31 άσκηση Β-98 και σελ. 64 άσκηση Β-167, όπου με το διακριτικό Β υποδηλώνονται οι σύνθετες ασκήσεις). Το 1959 εμφανίζεται επίσης ο πρώτος ... απόγονος της άσκησης, στο δεύτερο τόμο του βιβλίου του Χρίστου Μπαρμπαστάθη *Μεγάλη Άλγεβρα*. Στο κεφάλαιο *Εξισώσεις του δευτέρου βαθμού* προτείνεται προς λύση η επόμενη (σελ. 12):

> Αν οι συντελεσταί α, β, γ της εξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ η οποία έχει πραγματικάς ρίζας ρ_1, ρ_2 συνδέωνται δια της σχέσεως
> $$|\alpha| > |\alpha+2\beta+4\gamma|$$
> η μία τουλάχιστον των ριζών αυτής περιέχεται μεταξύ 0 και 1.

Η απόδειξη είναι ουσιαστικά μια επανάληψη της μεθόδου που εφαρμόστηκε στην περίπτωση της υπόθεσης $|\alpha+\beta+\gamma|<|\alpha|$:

$$|\alpha+2\beta+4\gamma|<|\alpha| \Rightarrow$$
$$\left|1+2\frac{\beta}{\alpha}+4\frac{\gamma}{\alpha}\right|<1 \Rightarrow$$
$$|1-2(\rho_1+\rho_2)+4\rho_1\rho_2|<1 \Rightarrow$$
$$|1-2\rho_1-2\rho_2+4\rho_1\rho_2|<1 \Rightarrow$$
$$|(1-2\rho_1)-2\rho_2(1-2\rho_1)|<1 \Rightarrow$$
$$|(1-2\rho_1)(1-2\rho_2)|<1 \Rightarrow$$
$$|1-2\rho_1||1-2\rho_2|<1 \Rightarrow$$
$$|1-2\rho_1|<1 \quad ή \quad |1-2\rho_2|<1$$
$$|1-2\rho_1|<1 \Rightarrow -1<1-2\rho_1<1 \Rightarrow -2<-2\rho_1<0 \Rightarrow 0<\rho_1<1$$

Ομοίως
$$|1-2\rho_2|<1 \Rightarrow 0<\rho_2<1.$$

Λίγα χρόνια μετά ακολούθησε η πρώτη δημοσίευση της άσκησης στο *Παράρτημα του Δελτίου της Ε.Μ.Ε.* (τον πρόδρομο του σημερινού *Ευκλείδη*)[2]. Στο τεύχος 144 που κυκλοφόρησε το Δεκέμβριο του 1963, προτείνεται προς λύση από τον Ι. Τσακιρίδη με την εξής, κάπως περίεργη, διατύπωση στην οποία αναμειγνύονται και οι δύο υποθέσεις (σελ. 93):

> Δίδεται η εξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχουσα ρίζας πραγματικάς τας ρ_1 και ρ_2. Εάν οι πραγματικοί συντελεσταί της εξισώσεως πληρούν μίαν των κατωτέρων σχέσεων είτε την
> $$|\alpha(\beta-\gamma)| > |\beta^2-\alpha\gamma| + |\gamma^2-\alpha\beta|$$
> είτε την
> $$|\alpha| > |\alpha+\beta+\gamma|.$$
> Να αποδειχθεί ότι μία τουλάχιστον των ριζών της εξισώσεως περιέχεται μεταξύ των 0 και 2.

Οι δύο μορφές της άσκησης (ανάλογα με την ανισότητα που δίνεται ως υπόθεση) καθιερώθηκαν έκτοτε στη σχετική βιβλιογραφία και εμφανίζονται στα περισσότερα από τα πολυάριθμα βιβλία Άλγεβρας ή τις μονογραφίες για το Τριώνυμο και τις Απόλυτες Τιμές που εκδόθηκαν τις επόμενες δεκαετίες. Για να αναφέρουμε ένα μόνο χαρακτηριστικό παράδειγμα, αμφότερες περιέχονται στο κεφάλαιο για την εξίσωση και το τριώνυμο 2ου βαθμού όλων των εκδόσεων της περίφημης *Άλγεβρας* του Θεόδωρου Καζαντζή (1967, σελ. 20 και 53, 1971, σελ. 21 και 54, 1978, σελ. 25).[3]

Σε ορισμένες μάλιστα περιπτώσεις εμφανίστηκαν νέοι ... απόγονοι ή επιχειρήθηκαν από τους συγγραφείς εναλλακτικές διατυπώσεις. Στο βιβλίο του Δ. Μάγκου *Τριώνυμο* (Θεσσαλονίκη, 1978) αφού λύνεται πρώτα η αρχική μορφή (σελ. 11), στη συνέχεια προτείνεται προς λύση μαζί με την απλοποιημένη εκδοχή και μια νέα μορφή της άσκησης που έχει διαφορετική υπόθεση και συμπέρασμα (σελ. 23):

> Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, έχει ρίζες πραγματικές, να αποδειχθεί ότι:
> α) Αν
> $$|\alpha| > |\alpha+\beta+\gamma|,$$
> τότε μια τουλάχιστον ρίζα ανήκει στο διάστημα $(0,2)$.
> β) Αν
> $$|\alpha| > |\alpha-\beta+\gamma|,$$
> τότε μια τουλάχιστον ρίζα ανήκει στο διάστημα $(-2,0)$.

Τον επόμενο χρόνο, οι Α. Κουκλάδας και Π. Γεωργιακάκης, στο βιβλίο τους *Μεθοδική Άλγεβρα 2* (Αθήνα, 1979) και στην ενότητα *Μέθοδος της εις άτοπον* του κεφαλαίου *Απόλυτα*, προτείνουν προς λύση την αρχική άσκηση στην εξής, ισοδύναμη μορφή που παρακάμπτει την αναφορά στην εξίσωση και τις ρίζες της (σελ. 50):

> Εάν $\alpha, \beta, \gamma, x, y \in \mathbb{R}$,
> $$x+y=-\frac{\beta}{\alpha}, xy=\frac{\gamma}{\alpha}$$
> και
> $$|\alpha(\beta-\gamma)| > |\beta^2-\alpha\gamma| + |\gamma^2-\alpha\beta|$$
> τότε ένας μόνον απ΄ τους x, y περιέχεται μεταξύ 0 και 2.

[2] Από τότε μέχρι σήμερα η συγκεκριμένη άσκηση έχει δημοσιευθεί στο *Παράρτημα του Δελτίου*, *τον Ευκλείδη* ή τον *Ευκλείδη Β΄* τουλάχιστον 10 φορές.

[3] Δύο αξιοσημείωτες εξαιρέσεις αποτελούν η *Μεγάλη Άλγεβρα* του Αριστείδη Πάλλα (πρώτη έκδοση το 1944, επανεκδόσεις το 1950, 1963, 1970) και τα *Αλγεβρικά Θέματα* του Παναγιώτη Μάγειρα (πρώτη έκδοση το 1952, επανεκδόσεις το 1958, 1970, 1975). Σε καμιά από τις επανεκδόσεις δεν έχει δημοσιευτεί η συγκεκριμένη άσκηση, παρά το γεγονός ότι περιέχονται σε αυτές εκατοντάδες παρόμοιες ασκήσεις.

Όλες οι εμφανίσεις της συγκεκριμένης άσκησης ή των παραλλαγών της στη σχετική βιβλιογραφία ακολουθούν την πεπατημένη της παραδοσιακής «ασκησιολογίας» και «μεθοδολογίας» που εντάσσεται στο γενικότερο πλαίσιο της «προετοιμασίας για τις εξετάσεις». Δεν συναντούμε σε καμιά περίπτωση προβληματισμούς για μαθηματικές ή διδακτικές προεκτάσεις, όπως π.χ. αναζήτηση γενικεύσεων, διαφορετικών αποδείξεων ή την ένταξη της άσκησης σ΄ ένα ευρύτερο εννοιολογικό πλαίσιο. Ορισμένα ζητήματα αυτού του είδους θα εξετάσουμε στην ενότητα που ακολουθεί.

3 Μερικές μαθηματικές και διδακτικές προεκτάσεις

Η πρώτη ερευνητική δραστηριότητα που ακολουθεί συνήθως την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, είναι η αναζήτηση κάποιων γενικεύσεων (οι οποίες συχνά ανοίγουν το δρόμο για διαφορετικές λύσεις ή αποδεικτικές προσεγγίσεις). Στην άσκηση που μας απασχολεί εδώ, μια πρώτη αυθόρμητη απόπειρα γενίκευσης θα μπορούσε να αναφέρεται στο βαθμό του πολυωνύμου:

Τι συμπέρασμα εξάγεται από τη σχέση

$$|\alpha+\beta+\gamma+\delta|<|\alpha|$$

για τους πραγματικούς συντελεστές ενός τριτοβάθμιου πολυωνύμου $\alpha x^2+\beta x^2+\gamma x+\delta$ που έχει τρεις πραγματικές ρίζες ρ_1,ρ_2 και ρ_3;

Μετασχηματίζοντας την ανισότητα $|\alpha+\beta+\gamma+\delta|<|\alpha|$ με χρήση των αντίστοιχων τύπων του Viéte

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3=-\frac{\beta}{\alpha},\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1=\frac{\gamma}{\alpha},\rho_1\rho_2\rho_3=-\frac{\delta}{\alpha}$$

διαπιστώνουμε (αποτελεί μια ενδιαφέρουσα άσκηση παραγοντοποίησης) ότι και στην περίπτωση αυτή προκύπτει η ανισότητα

$$|(1-\rho_1)(1-\rho_2)(1-\rho_3)|<1$$

από την οποία έπεται βέβαια ότι μία τουλάχιστον ρίζα του πολυωνύμου βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και το 2.

Αυτή η γενίκευση μεταφέρεται άμεσα στην περίπτωση του αντίστοιχου πολυωνύμου ν-οστού βαθμού και φέρνει στο προσκήνιο μια νέα αποδεικτική προσέγγιση. Αν λάβουμε υπόψη τις θεμελιώδεις ταυτότητες:[4]

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x-\rho_1\right)\left(x-\rho_2\right)$$

και

$$\alpha x^2+\beta x^2+\gamma x+\delta=\alpha\left(x-\rho_1\right)\left(x-\rho_2\right)\left(x-\rho_3\right)$$

διαπιστώνουμε άμεσα ότι ισχύει

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha\left(1-\rho_1\right)\left(1-\rho_2\right)$$

και

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha\left(1-\rho_1\right)\left(1-\rho_2\right)\left(1-\rho_3\right)$$

Από τις σχέσεις αυτές οι ανισότητες

$$|\alpha+\beta+\gamma|<|\alpha|$$

και

$$|\alpha+\beta+\gamma+\delta|<|\alpha|$$

μας δίνουν αμέσως τα αντίστοιχα συμπεράσματα για τις ρίζες, χωρίς εμπλοκή των τύπων του Viéte και παραγοντοποιήσεων.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα προοπτική γενίκευσης μας παρέχει η σύγκριση των τριών διαφορετικών υποθέσεων και των αντίστοιχων συμπερασμάτων που έχουμε συναντήσει ήδη στην βιβλιογραφία:

1. $|\alpha+\beta+\gamma|<|\alpha| \quad \rho\in(0,2)$ (Κανέλλος)
2. $|\alpha+2\beta+4\gamma|<|\alpha| \quad \rho\in(0,1)$ (Μπαρμπαστάθης)
3. $|\alpha-\beta+\gamma|<|\alpha| \quad \rho\in(-2,0)$ (Μάγκος)

Ξαναγράφοντας τις ανισότητες αυτές στη μορφή

$$\left|\alpha+1\cdot\beta+1^2\cdot\gamma\right|<|\alpha|$$

$$\left|\alpha+2\cdot\beta+2^2\cdot\gamma\right|<|\alpha|$$

$$\left|\alpha+(-1)\beta+(-1)^2\gamma\right|<|\alpha|$$

οδηγούμαστε αυθόρμητα στην εικασία - ερώτηση: Τι συμπέρασμα προκύπτει για τις πραγματικές ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ όταν ισχύει $|\alpha+3\beta+9\gamma|<|\alpha|$; Η εφαρμογή της ίδιας διαδικασίας που ακολουθήσαμε στις προηγούμενες περιπτώσεις μας οδηγεί στην ανισότητα

$$|1-3\rho_1||1-3\rho_2|<1$$

από την οποία προκύπτει ότι μία τουλάχιστον ρίζα του τριωνύμου ανήκει στο διάστημα $\left(0,\frac{2}{3}\right)$. Το συμπέρασμα αυτό και η μορφή των αντίστοιχων διαστημάτων μας οδηγούν στη διατύπωση της επόμενης πρότασης:

Προταση 1. Αν οι συντελεστές του τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ικανοποιούν την ανισότητα

$$\left|\alpha+\lambda\beta+\lambda^2\gamma\right|<|\alpha|$$

$\lambda\in\mathbb{R}$ με $\lambda\neq 0$, και το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες, τότε μία τουλάχιστον ρίζα ανήκει στο διάστημα $\left(0,\frac{2}{\lambda}\right)$ αν $\lambda>$ ή στο $\left(\frac{2}{\lambda},0\right)$ αν $\lambda<0$.

Αποδειξη. Η απόδειξη γίνεται με τη γνωστή διαδικασία, από την οποία προκύπτει ότι:

$$\left|\alpha+\lambda\beta+\lambda^2\gamma\right|<|\alpha|\Rightarrow|1-\lambda\rho_1||1-\lambda\rho_2|<1$$

Από την τελευταία ανισότητα δεν είναι δύσκολο να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα της πρότασης, διακρίνοντας τις περιπτώσεις

[4]Η μεγάλη σημασία αυτών των ταυτοτήτων είναι αντιστρόφως ανάλογη με την χρήση τους στη διδασκαλία της Άλγεβρας στο Λύκειο. Η δεύτερη απουσιάζει εντελώς ενώ η πρώτη εκφυλίζεται σε «τύπο παραγοντοποίησης». Σύμφωνα με τα ισχύοντα αναλυτικά προγράμματα, προτεραιότητα στη διδασκαλία των πολυωνύμων στη Β΄ Λυκείου έχουν υπολογιστικές τεχνικές όπως το σχήμα Horner.

[5]Στην πορεία προς τη διατύπωση της Πρότασης 1 διαπιστώνουμε ένα βασικό χαρακτηριστικό της γενίκευσης στα Μαθηματικά, δηλαδή την αντικατάσταση ορισμένων σταθερών από παραμέτρους. Η ανάπτυξη της ικανότητας «θέασης του γενικού μέσα στο ειδικό» αποτελεί ένα βασικό ζητούμενο της Διδακτικής των Μαθηματικών, και ένας σχετικά εύκολος τρόπος να καλλιεργηθεί αυτή η ικανότητα από τη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι να ενθαρρύνονται οι μαθητές να διακρίνουν την επίλυση μιας διαδοχικής σειράς όμοιων ασκήσεων από μια μελέτη πάνω στο σύνολο αυτών των ασκήσεων. Βλέπε περισσότερα για το ζήτημα αυτό στο (Θωμαΐδης , 2011).

$\lambda > 0$ και $\lambda < 0$.

Οι κλασικές ασκήσεις που είχαν ως υποθέσεις τις ανισότητες (1), (2) και (3) αποτελούν πλέον ειδικές περιπτώσεις της Πρότασης 1, για $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ και $\lambda = -1$ αντίστοιχα.[5]

Μια άλλη προοπτική γενίκευσης μας παρέχει η αποδεικτική μέθοδος που υποδείξαμε παραπάνω με βάση την ταυτότητα $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$. Το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήγουμε μας οδηγεί στην επόμενη βασική πρόταση, την απόδειξη της οποίας αφήνουμε ως άσκηση για τον αναγνώστη:

Προταση 2. Αν οι συντελεστές του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ικανοποιούν την ανισότητα

$$\left|\alpha\mu^2 + \beta\mu + \gamma\right| < |\alpha|,$$

$\mu \in \mathbb{R}$, (δηλαδή $|f(\mu)| < |\alpha|$) και το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες, τότε μία τουλάχιστον ρίζα ανήκει στο διάστημα $(\mu-1, \mu+1)$.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η γεωμετρική ερμηνεία αλλά και η περαιτέρω μελέτη αυτού του αποτελέσματος, το οποίο εκφράζει μία αντιστοιχία ανάμεσα σ' ένα διάστημα που περιέχει τιμές του τριωνύμου και ένα διάστημα που περιέχει μία ρίζα του:

$$f(\mu) \in (-|\alpha|, |\alpha|) \Rightarrow \rho \in (\mu-1, \mu+1).$$

Με τον τρόπο που έχουμε εργαστεί μέχρι τώρα φαίνεται ότι έχουμε εξαντλήσει τα περιθώρια γενικεύσεων της άσκησης για το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Μια νέα προοπτική ανοίγεται όμως αν συνδυάσουμε την Πρόταση 2 με τις επόμενες βασικές προτάσεις της σχολικής Άλγεβρας:

Θεωρημα. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \rho_1, \rho_2 \in R$, $\alpha \neq 0$ και $\beta^2 > 4\alpha\gamma$, τότε οι σχέσεις $\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $\rho_1\rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ αποτελούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε οι αριθμοί ρ_1, ρ_2 να είναι οι ρίζες του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Πορισμα. Οι αριθμοί ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 + \rho_2 = S$ και $\rho_1\rho_2 = P$ είναι ρίζες του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$[6]

Από το προηγούμενο πόρισμα γίνεται άμεσα φανερό ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε διάφορα τριώνυμα που οι ρίζες τους είναι συναρτήσεις των ριζών ρ_1 και ρ_2 ενός δεδομένου τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Για παράδειγμα, από τις σχέσεις

$$\lambda\rho_1 + \lambda\rho_2 = \lambda(\rho_1 + \rho_2) = -\frac{\lambda\beta}{\alpha}$$

και

$$\lambda\rho_1 \cdot \lambda\rho_2 = \lambda^2\rho_1\rho_2 = \frac{\lambda^2\gamma}{\alpha}$$

προκύπτει σύμφωνα με το πόρισμα ότι οι αριθμοί $\lambda\rho_1$ και $\lambda\rho_2$ είναι ρίζες του τριωνύμου $\varphi(x) = \alpha x^2 + \lambda\beta x + \lambda^2\gamma$. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί επίσης ότι το τριώνυμο

$$\sigma(x) = \gamma x^2 + \beta x + \alpha$$

έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{\rho_1}$ και $\frac{1}{\rho_2}$, ενώ το τριώνυμο

$$\tau(x) = \alpha x^2 + \left(\beta^2 - 2\alpha\gamma\right)x + \gamma^2$$

έχει ρίζες τους αριθμούς ρ_1^2 και ρ_2^2 (ασκήσεις αυτού του είδους αφθονούσαν στην βιβλιογραφία της κλασικής σχολικής Άλγεβρας).

Η εφαρμογή τώρα της παραπάνω Πρότασης 2 στο τριώνυμο

$$\varphi(x) = \alpha x^2 + \lambda\beta x + \lambda^2\gamma,$$

οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αν ισχύει

$$\left|\alpha\mu^2 + \lambda\beta\mu + \lambda^2\gamma\right| < |\alpha|$$

(δηλαδή $|\varphi(\mu)| < |\alpha|$) και το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες, τότε μία τουλάχιστον από αυτές (δηλαδή ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς $\lambda\rho_1$ και $\lambda\rho_2$) θα ανήκει στο διάστημα $(\mu-1, \mu+1)$. Το συμπέρασμα αυτό μας οδηγεί στην επόμενη πρόταση, την απόδειξη της οποίας αφήνουμε ως άσκηση για τον αναγνώστη:

Προταση 3. Αν οι συντελεστές του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ικανοποιούν την ανισότητα

$$\left|\alpha\mu^2 + \lambda\beta\mu + \lambda^2\gamma\right| < |\alpha|$$

με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 0$, και το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες, τότε μία τουλάχιστον ρίζα ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{\mu-1}{\lambda}, \frac{\mu+1}{\lambda}\right)$ αν $\lambda > 0$ ή στο $\left(\frac{\mu+1}{\lambda}, \frac{\mu-1}{\lambda}\right)$ αν $\lambda < 0$.

Με τη μέθοδο αυτή, δηλαδή την εφαρμογή της Πρότασης 2 σε τριώνυμα που οι ρίζες τους είναι συναρτήσεις των ριζών του $f(x)$, ανοίγει ο δρόμος για ένα μεγάλο αριθμό ωραίων συμπερασμάτων. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης δεν θα έχει δυσκολία να αποδείξει δύο από αυτά, τα οποία διατυπώνουμε ως εξής:

Προταση 4. Αν οι συντελεστές του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ικανοποιούν την ανισότητα

$$\left|\alpha + \mu\beta + \mu^2\gamma\right| < |\gamma|$$

$\mu \in \mathbb{R}$ και $\mu \neq \pm 1$, και το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες, τότε μία τουλάχιστον ρίζα ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{\mu-1}, \frac{1}{\mu+1}\right)$ αν $-1 < \mu < 1$ ή στο διάστημα $\left(\frac{1}{\mu+1}, \frac{1}{\mu-1}\right)$ αν $\mu < -1$ ή $\mu > 1$.

Υποδειξη: Να γίνει εφαρμογή της Πρότασης 2 στο τριώνυμο $\sigma(x) = \gamma x^2 + \beta x + \alpha$ που έχει ρίζες τις αντίστροφες των ριζών του $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Προταση 5. Αν οι συντελεστές του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ικανοποιούν την ανισότητα

$$\left|f\left(\sqrt{\mu}\right) f\left(-\sqrt{\mu}\right)\right| < |\alpha|^2$$

$\mu \in \mathbb{R}$ και $\mu \geq 1$, και το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες, τότε για μία τουλάχιστον ρίζα του ρ, ισχύει $|\rho| \in \left(\sqrt{\mu-1}, \sqrt{\mu+1}\right)$.

Υποδειξη: Να γίνει εφαρμογή της Πρότασης 2 στο τριώνυμο $\tau(x) = \alpha x^2 + \left(\beta^2 - 2\alpha\gamma\right)x + \gamma^2$ που έχει ρίζες τα τετράγωνα των ριζών του $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση αποτελεί η επόμενη άσκηση, η οποία προκύπτει από την Πρόταση 4 για $\mu = 2$:

[6] Η διδασκαλία των λεγόμενων τύπων του Viéte (στοιχειώδεις συμμετρικές παραστάσεις των ριζών) σύμφωνα με όσα αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, ελάχιστα συμβάλει στην κατανόηση του σημαντικότατου ρόλου τους στη θεωρία των πολυωνυμικών εξισώσεων. Επίσης η έμφαση στον λεγόμενο «τύπο κατασκευής εξίσωσης 2ου βαθμού $x^2 - Sx + P = 0$» υποβαθμίζει τη μεγάλη μαθηματική και διδακτική σημασία του συστήματος $x + y = S, xy = P$. Το σύστημα αυτό υπήρξε ιστορικά το πρόβλημα - γεννήτορας από τη λύση του οποίου προήλθε η σχέση που είναι γνωστή ως «τύπος της διακρίνουσας» των εξισώσεων 2ου βαθμού.

Ασκηση. Αν ισχύει

$$|\alpha + 2\beta + 4\gamma| < |\gamma|$$

και το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ έχει πραγματικές ρίζες, τότε μία τουλάχιστον από αυτές θα ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{3},\ 1\right)$.

Το ενδιαφέρον εστιάζεται αρχικά στην αποδεικτική τεχνική που απαιτεί η επίλυση της συγκεκριμένης άσκησης, αν θεωρηθεί ανεξάρτητα από την Πρόταση 4. Μια άλλη ενδιαφέρουσα προοπτική ανοίγεται από τη σύγκριση της ανισότητας $|\alpha + 2\beta + 4\gamma| < |\gamma|$ με την $|\alpha + 2\beta + 4\gamma| < |\alpha|$ η οποία, όπως διαπιστώσαμε παραπάνω, εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας στο διάστημα $(0, 1)$. Η σύγκριση αυτή μπορεί να μας οδηγήσει σε μια συζήτηση για το πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα του εντοπισμού των ριζών ενός πολυωνύμου και τη βελτίωση των σχετικών φραγμάτων (η αλλαγή του συντελεστή α με τον γ στο δεύτερο μέλος της ανισότητας περιορίζει το διάστημα κατά το ένα τρίτο). Η σχετική έρευνα, στην οποία είχαν κατά το παρελθόν λάβει μέρος με αξιόλογη - σε διεθνές επίπεδο - συμβολή Έλληνες μαθηματικοί από το χώρο της μέσης εκπαίδευσης, περιέχει πολλά ωραία αποτελέσματα που θα μπορούσαν (με κατάλληλη προσαρμογή) να ενταχθούν στη διδασκαλία των Μαθηματικών και να αποδώσουν κάποιο νόημα στην ασυνάρτητη παραδοσιακή ασκησιολογία.

4 Επίλογος

Κλείνοντας αυτή την εργασία θέλουμε να σημειώσουμε ότι περιοριστήκαμε στο τριώνυμο δευτέρου βαθμού, έτσι ώστε το περιεχόμενό της να μπορεί να αξιοποιηθεί διδακτικά σε όλες τις τάξεις του Λυκείου. Είναι όμως φανερό ότι τα συμπεράσματα γενικεύονται για πολυώνυμα ν-οστού βαθμού ($\nu \in \mathbb{N}$, $\nu > 2$). Για τον ίδιο λόγο επίσης υποθέσαμε την ύπαρξη πραγματικών ριζών και περιοριστήκαμε σε διαστήματα της πραγματικής ευθείας, ενώ τα συμπεράσματα ισχύουν και στη γενική περίπτωση μιγαδικών εν γένει ριζών και αντίστοιχους τόπους (κυκλικούς δίσκους ή δακτυλίους) του μιγαδικού επιπέδου. Θέλουμε επίσης να τονίσουμε ότι στην κλασική βιβλιογραφία της στοιχειώδους Άλγεβρας υπάρχει ένα πλούσιο απόθεμα προβλημάτων και ασκήσεων τα οποία σήμερα, εποχή υποβάθμισης της διδασκαλίας των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και μετατόπισης του «ασκησιολογικού» ενδιαφέροντος προς την Ανάλυση, έχουν περιέλθει στην αφάνεια. Όλο αυτό το υλικό, που είχε μείνει κατά το παρελθόν εγκλωβισμένο στην εξεταστική θεματολογία, αξίζει να γίνει αντικείμενο μελέτης και διδακτικής ανάλυσης με στόχο την αξιοποίησή του στην τάξη, σε ερευνητικές εργασίες των μαθητών και σε μαθηματικούς ομίλους.

Βιβλιογραφικές παραπομπές

Σ. Ζερβος, *Ιστορική αναδρομή στο ρόλο του φροντιστή.* Ημερολόγιο 1999, σελ. 16-26. Ομοσπονδία Εκπαιδευτικών Φροντιστών Ελλάδας.

Γ. Θωμαΐδης, *Διδακτική μετατόπιση μαθηματικών εννοιών και εμπόδια μάθησης (η περίπτωση της απόλυτης τιμής).* Διδακτορική διατριβή, Τμήμα Μαθηματικών Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη 1995.

Γ. Θωμαΐδης, *Ιστορικές και διδακτικές όψεις της γενίκευσης στην Άλγεβρα.* Στο συλλογικό τόμο της Επιστημονικής Ένωσης για τη Διδακτική των Μαθηματικών: Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση, σελ. 145-182. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2011.

Θ. Καζαντζης, *Φροντιστήρια και μαθηματικοί - φροντιστές.* Ημερολόγιο 1999, σελ. 28-30. Ομοσπονδία Εκπαιδευτικών Φροντιστών Ελλάδας.

Λ. Τσιλογλου, *Τα Φροντιστήρια στην Ελλάδα: Η Ιστορία και οι Άνθρωποι.* Α΄ τόμος 1860 - 1940. Κέδρος, Αθήνα 2007.