Εκθέτης

Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας

Φύλλο 7, 10 Σεπτεμβρίου 2010

Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το LaTeX 2_ε
Επιμέλεια:

Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com

Hardy 31 [1]

Μια παρατήρηση στην άσκηση 31 σελ. 37 της δέκατης έκδοσης του βιβλίου του G.H. Hardy: *A Course of Pure Mathematics* (Cambridge University Press, 1975)

Μανώλης Ζαμπετάκης
Φοιτητής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Η εκφώνηση της άσκησης:

> **31.** If $(a-b^3)\,b>0$, then
> $$\sqrt[3]{\left\{a+\frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\left(\frac{a-b^3}{3b}\right)}\right\}}+\sqrt[3]{\left\{a-\frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\left(\frac{a-b^3}{3b}\right)}\right\}}$$
> is rational. [Each of the numbers under a cube root is of the form
> $$\left\{\alpha+\beta\sqrt{\left(\frac{a-b^3}{3b}\right)}\right\}^3,$$
> where α and β are rational.]

Θεωρώ τους αριθμούς:

$$\varepsilon=\sqrt[3]{a+\frac{9b^3+a}{2b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}$$

$$\zeta=\sqrt[3]{a-\frac{9b^3+a}{2b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}$$

Πρόταση 1 *Αν ο αριθμός $\varepsilon+\zeta$ είναι ρητός τότε και ο αριθμός τότε και ο αριθμός $\varepsilon\zeta$ είναι ρητός.*

Απόδειξη Έστω λοιπόν ότι:

$$\varepsilon+\zeta\in\mathbb{Q} \tag{1}$$

Τότε

$$(\varepsilon+\zeta)^3\in\mathbb{Q} \tag{2}$$

επίσης από την αρχική μορφή των $\varepsilon,\ \zeta$ έχω ότι

$$\varepsilon^3+\zeta^3=a+\frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}+a-\frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}=2a$$

άρα

$$\varepsilon^3+\zeta^3\in\mathbb{Q} \tag{3}$$

Από την (2) με την βοήθεια της (3) βρίσκουμε $3\varepsilon^2\zeta+3\varepsilon\zeta^2\in\mathbb{Q}$ και$\varepsilon\zeta\,(\varepsilon+\zeta)\in\mathbb{Q}$. Άρα: $\varepsilon\zeta\in\mathbb{Q}$. ■

Άμεση συνέπεια του προηγουμένου είναι ότι

- $\varepsilon\zeta\notin\mathbb{Q}\Rightarrow\varepsilon+\zeta\notin\mathbb{Q}\quad(*)$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν a,b για τα οποία $\varepsilon\zeta\notin\mathbb{Q}$. Έχουμε:

$$\varepsilon\zeta=\sqrt[3]{\left(a+\frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}\right)\left(a-\frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}\right)}$$

Προφανώς για να είναι ο $\varepsilon\zeta$ ρητός θα πρέπει να είναι ο $(\varepsilon\zeta)^3$ κύβος ρητού. Είναι:

$$(\varepsilon\zeta)^3=\left(a+\frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}\right)\left(a-\frac{9b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}\right)=$$

$$=a^2-\left(\frac{9b^3+a}{3b}\right)^2\frac{a-b^3}{3b}=a^2-\frac{\left(81b^6+18b^3a+a^2\right)\left(a-b^3\right)}{27b^3}=$$

$$=\frac{81b^9+10b^3a^2-63b^6a-a^3}{27b^3}$$

Προφανώς αφού ο $(\varepsilon\zeta)^3$ είναι κύβος ρητού και ο $(\varepsilon\zeta)^3\left(27b^3\right)$ είναι κύβος ρητού. Άρα θα πρέπει και ο:

$$81b^9+10b^3a^2-63b^6a-a^3 \tag{4}$$

να είναι κύβος ρητού. Ισχύει το ακόλουθο:

Λήμμα 1 *Αν ένας ακέραιος αριθμός γράφεται σαν κύβος ρητού, τότε αυτός ο ρητός είναι ακέραιος.*

Απόδειξη. Έστω οτί ο m είναι ένας ακέραιος αριθμός και έστω ότι:

$$m=\frac{p^3}{q^3},\quad p,q\in\mathbb{Z}^*,\quad (p,q)=1$$

τότε

$$mq^3=p^3$$

και αφού τα p, q δεν έχουν κοινούς διαιρέτες

$$m=kp^3,k\in Z^*$$

οπότε

$$kp^3q^3=p^3$$

δηλαδή $kq^3=1$ και αφού οι k q^3 είναι ακέραιοι θα είναι $k=\pm1$, $q=\pm1$ οπότε $m=(\pm p)^3$. ■

Αν τώρα υποτεθεί ότι για κάποιο ζεύγος a,b είναι $\varepsilon+\zeta\in\mathbb{Q}$ θα πρέπει και ο αριθμός

$$81b^9+10b^3a^2-63b^6a-a^3$$

να είναι κύβος ακεραίου. Αλλά $a=9$ και $b=2$ είναι

$$81b^9+10b^3a^2-63b^6a-a^3=10935$$

και ο αριθμός 10935 δεν είναι τέλειος κύβος.

Από τα προηγούμενα συνάγουμε ότι η άσκηση είναι λάθος.

[1] Τα Χριστούγεννα του 2008 ο Μανώλης Ζαμπετάκης, πρώην μαθητής μου στην Ευαγγελική, και τότε πρωτοετής φοιτητής, μου επεσήμανε ότι η συγκεκριμένη άσκηση μάλλον έχει πρόβλημα. Η επισήμανση φαίνονταν σωστή αλλά από την άλλη μεριά το βιβλίο αυτό δεν είναι τυχαίο: Κυκλοφορεί από το 1908 και θεωρείται κλασικό στο είδος του. Έχει μορφώσει χιλιάδες σπουδαστές ανά τον κόσμο και έχει υποστεί αλλεπάλληλες εκδόσεις με τελευταία την επετειακή έκδοση (Centenary) εκατονταετηρίδος το 2008. Η πιθανότητα παροράματος θεωρείται πολύ μικρή. Εντατικός έλεγχος στο διαδίκτυο δεν έδειξε ότι υπήρχε καταγεγραμμένο κάτι για την άσκηση 31. Το θέμα, μαζί με την αιτιολόγηση του λάθους ετέθη τον Οκτώβριο του 2009 στον δικτυακό τόπο mathematica και από την συζήτηση http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=63&p=18295#p18295 προέκυψε άλλη μία επιβεβαίωση της επισήμανσης του Μανώλη.(ΣΤΕ)