Εκθέτης

Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας

Φυλλο 6, 29 Αυγουστου 2010

Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το LaTeX 2_ε
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com

Πυθαγόρειες Τριάδες Ακεραίων

Στράτος Μάκρας, Δρ Μαθηματικών
Ευρωπαϊκό Σχολείο Βρυξελλες ΙΙΙ

Περίληψη

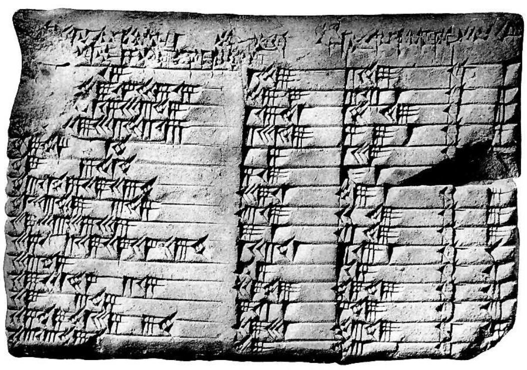
Το κείμενο αυτό προέρχεται από μαθήματα που έδωσα για τους μαθητές και τις μαθήτριες των προχωρημένων Μαθηματικών του Ευρωπαϊκού σχολείο Βρυξελλών ΙΙΙ και περιέχει αποδείξεις των τύπων για τις Πυθαγόρειες τριάδες

1 Γενικά για τις Πυθαγόρειες Τριάδες

Ορισμός 1.1 *Μια τριάδα ακεραίων* (x, y, z) *λέγεται Πυθαγόρεια Τριάδα (ΠΤ) αν ικανοποιεί την εξίσωση*

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε όλες τις ΠΤ. Αρκετές τέτοιες τριάδες γνώριζαν οι Βαβυλώνιοι, ήδη από την δεύτερη χιλιετία π.Χ.



Η Βαβυλωνιακή πινακίδα Plimpton 322 που περιέχει μερικές Πυθαγόρειες τριάδες

Οι Πυθαγόρειοι προσδιόρισαν άπειρες αλλά όχι όλες. Πιο συγκεκριμένα, αυτές για τις οποίες ισχύει $z = y + 1$ Πράγματι. Η (1), τότε, γράφεται: $x^2 + y^2 = y^2 + 2y + 1$ ή $x^2 = 2y + 1$. Αν λοιπόν θέσουμε, στην θέση του x ένα οποιονδήποτε περιττό ακέραιο μεγαλύτερο του 1, θα βρούμε έναν y και έναν z οι οποίοι ικανοποιούν την (1). Για παράδειγμα: για $x = 3$ θα βρούμε $9 = 2y + 1$ άρα $y = 4$ και $z = 5$. Δηλαδή την ΠΤ $(3, 4, 5)$ την πλέον κλασσική!

Ο Πλάτων (Ναι ο Πλάτων! Τότε οι φιλόσοφοι ησχολούντο και με τα Μαθηματικά) προσδιόρισε, και αυτός, άπειρο πλήθος ΠΤ και συγκεκριμένα αυτές για τις οποίες ισχύει $z = y + 2$. Πράγματι. Η (1), τότε, γράφεται: $x^2 + y^2 = y^2 + 4y + 4$ ή $x^2 = 4(y + 1)$. Αν λοιπόν θέσουμε, στην θέση του x ένα οποιονδήποτε άρτιο ακέραιο μεγαλύτερο του 2, θα βρούμε έναν y και έναν z οι οποίοι ικανοποιούν την (1). Για παράδειγμα: για $x = 4$ θα βρούμε $16 = 4(y + 1)$ άρα $y = 3$ και $z = 5$.

Ο Ευκλείδης (-325 με -265 περίπου), αργότερα ο Διόφαντος (περ. 200/214 - περ. 284/298), αργότερα ο Ινδός Βραχμαγκούπτα (ή κάπως έτσι) (598-668) αργότερα ο Pierre de Fermat, (1601-1665) γνώριζαν πώς να βρίσκουν όλες τις Π.Τ άλλα δεν άφησαν (ή άφησαν και δεν βρέθηκε) κάποια απόδειξη. Την πρώτη διατύπωση, με απόδειξη, για τον τρόπο εύρεσης όλων των ΠΤ την έδωσε ο Ελβετός μαθηματικός Leonard Paul Euler (1707-1783).

Οι Πυθαγόρειοι, ο Πλάτων, ο Ευκλείδης, ο Διόφαντος, ο Βραχμαγκούπτα, ο Fermat και ο Euler ασχολήθηκαν με την εύρεση των Πυθαγορείων τριάδων.

Θα αρχίσουμε τον δρόμο προς την απόδειξη με μερικές παρατηρήσεις

Παρατηρηση 1 Τα τετράγωνα των αρτίων ακεραίων είναι άρτιοι και των περιττών περιττοί. (Συνελόντι ειπείν: η ύψωση στο τετράγωνο διατηρεί την αρτιότητα των ακεραίων)

Η απόδειξη είναι απλούστατη και επαφίεται εις τον αναγνώστη.

Παρατηρηση 2 Τα τετράγωνα των ακεραίων, διαιρούμενα δια 4 δίνουν υπόλοιπο 0 ή 1

Έστω πράγματι a ένας ακέραιος ο οποίος βέβαια θα είναι είτε άρτιος είτε περιττός.

- Αν $a = 2k$ τότε $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$
- Αν $a = 2k + 1$ τότε $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$

Τελικά λοιπόν για οποιονδήποτε ακέραιο a ισχύει

$$a = 0(\mathrm{mod}4) \text{ είτε } a = 1(\mathrm{mod}4)$$

Προκύπτει έτσι αμέσως το εξής συμπέρασμα: Οι ακέραιοι οι οποίοι διαιρούμενοι δια 4 δίνουν υπόλοιπο 2 ή 3 δεν είναι τετράγωνα ακεραίων

Παρατηρηση 3 Αν (x, y, z) είναι μια ΠΤ και a ένας ακέραιος, τότε η (ax, ay, az) είναι και αυτή είναι μια ΠΤ

Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να εστιάσουμε την προσοχή μας στην εύρεση των ΠΤ (x, y, z) με μ.κ.δ$(x, y, z) = 1$ οι οποίες λέγονται **πρωτογενείς**. Όλες οι υπόλοιπες προκύπτουν από αυτές με πολλαπλασιασμό επί κάποιον ακέραιο.

Παρατηρηση 4 Υπενθυμίζουμε την, πολύ ωραία, ταυτότητα

$$(x^2-y^2)^2+(2xy)^2=(x^2+y^2)^2 \tag{2}$$

Την οποία, αν έχετε ξεχάσει μπορείτε να επαληθεύσετε.

2 Η απόδειξη

Θεωρημα 1 *Όλες οι πρωτογενείς Πυθαγόρειες Τριάδες (A,B,C) δίνονται από τους τύπους*

$$A=x^2-y^2,\quad B=2xy \ \text{ και } C=x^2-y^2$$

όπου x,y φυσικοί αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους, διαφορετικής αρτιότητας με $x>y$.

Αποδειξη. Από την ταυτότητα 2 που αναφέραμε πιο πάνω προκύπτει ότι η τριάδα (A,B,C) είναι πυθαγόρεια.

α) Έστω τώρα A,B,C φυσικοί αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους και τέτοιοι ώστε

$$A^2+B^2=C^2 \tag{3}$$

Από την (3) έπεται ότι αν κάποιος πρώτος διαιρεί δύο από τους A,B,C, τότε θα διαιρεί και τον τρίτο. Κατά συνέπεια οι A,B,C είναι και ανά δύο πρώτοι μεταξύ τους, (αν π·χ οι A και B έχουν ένα κοινό πρώτο διαιρέτη p τότε ο p θα διαιρεί τον A^2+B^2 άρα και τον C^2. Άρα ο p θα διαιρεί και τον C, πράγμα άτοπο αφού οι A,B,C είναι πρώτοι μεταξύ τους

β) Θα αποδείξουμε τώρα ότι οι A και B είναι διαφορετικής αρτιότητας Πράγματι, αν οι A και B είναι άρτιοι τότε και ο C θα είναι άρτιος, πράγμα άτοπο αφού οι A,B,C είναι πρώτοι μεταξύ τους Αν πάλι οι A και B είναι περιττοί, ας πούμε $A=2k+1$ και $B=2m+1$ τότε θα έχούμε

$$C^2=A^2+B^2=4(k^2+m^2+k+m)+2=2(\mathrm{mod}4)$$

που είναι αδύνατον όπως είδαμε στη παρατήρηση 2.

Έτσι λοιπόν οι A και B είναι διαφορετικής αρτιότητας και, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι ο A είναι άρτιος και ο B περιττός. Σημειώνουμε ότι ο C θα είναι περιττός ως άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού. Έχουμε τώρα από την (3)

$$A^2=(C-B)(C+B) \tag{4}$$

Οι αριθμοί $C-B$ και $C+B$ θα είναι και οι δύο άρτιοι ως άθροισμα περιττών και έτσι η (4) μπορεί να γραφτεί:

$$\left(\frac{A}{2}\right)^2=\left(\frac{C-B}{2}\right)\left(\frac{C+B}{2}\right) \quad (4\alpha)$$

Έστω τώρα p ένας πρώτος κοινός διαιρέτης των $\frac{C-B}{2}$ και $\frac{C+B}{2}$. Ο p θα διαιρεί και το άθροισμά τους δηλαδή τον C αλλά και την διαφορά τους δηλαδή τον B, πράγμα άτοπο αφού οι δύο αυτοί αριθμοί είναι πρώτοι μεταξύ τους. Επομένως οι αριθμοί $\frac{C-B}{2}$ και $\frac{C+B}{2}$ είναι πρώτοι μεταξύ τους και αφού το γινόμενό τους είναι τετράγωνο καθένας από αυτούς θα είναι τετράγωνο. Θέτουμε λοιπόν

$$\frac{C+B}{2}=x^2 \ \text{ και } \ \frac{C-B}{2}=y^2$$

(οι x και y είναι πρώτοι μεταξύ τους) και η (4α) γράφεται

$$A^2=4x^2y^2 \ \text{ ή } \ A=2xy$$

Επίσης

$$\frac{C+B}{2}+\frac{C-B}{2}=x^2+y^2 \ \text{ ή } \ C=x^2+y^2$$

και τέλος

$$\frac{C+B}{2}-\frac{C-B}{2}=x^2-y^2 \ \text{ ή } \ B=x^2-y^2$$

Οι x και y είναι διαφορετικής αρτιότητας διότι δεν είναι άρτιοι (αφού είναι πρώτοι μεταξύ τους) και δεν είναι περιττοί γιατί τότε οι B, C θα ήταν άρτιοι πράγμα άτοπο αφού είναι πρώτοι μεταξύ τους. ∎

3 Άλλες τρείς αποδείξεις

Θα αποδείξουμε τώρα το ίδιο θεώρημα και με άλλους τρόπους διότι, όπως έλεγε και ο αείμνηστος Dov Tamari (1911-2006), και είχε απόλυτο δίκιο, «new proofs is new mathematics»

3.1 Η 2η απόδειξη

Έστω λοιπόν (x,y,z) μια τριάδα φυσικών αριθμών πρώτων μεταξύ τους οι οποίοι ικανοποιούν την σχέση (1). Η (1) γράφεται

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2=1 \tag{5}$$

Θα υπάρχουν λοιπόν αριθμοί $\varphi=2\omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιοι ώστε (βάζουμε το 2ω για ευκολία στις πράξεις)

$$\sigma\upsilon\nu 2\omega=\frac{x}{z} \quad \text{ και } \quad \eta\mu 2\omega=\frac{y}{z}$$

Υπενθυμίζουμε τώρα τους τύπους

$$\sigma\upsilon\nu 2\omega=\frac{1-\varepsilon\phi^2\omega}{1+\varepsilon\phi^2\omega} \quad \text{ και } \quad \eta\mu 2\omega=\frac{2\varepsilon\phi\omega}{1+\varepsilon\phi^2\omega}$$

Έτσι έχουμε,

$$\frac{x}{z}=\sigma\upsilon\nu 2\omega=\frac{1-\varepsilon\phi^2\omega}{1+\varepsilon\phi^2\omega} \tag{6}$$

Από αυτή την σχέση προκύπτει ότι ο αριθμός $\varepsilon\phi^2\omega$ είναι ρητός. Επίσης:

$$\frac{y}{z}=\eta\mu 2\omega=\frac{2\varepsilon\phi\omega}{1+\varepsilon\phi^2\omega} \tag{7}$$

Επειδή οι αριθμοί $y,z,\varepsilon\phi^2\omega$ είναι ρητοί, από την (7) προκύπτει ότι και ο αριθμός $\varepsilon\phi\omega$ είναι επίσης ρητός. Έστω λοιπόν $\varepsilon\phi\omega=\frac{m}{n}$ με πρώτους μεταξύ τους. Από την σχέση (6) έχουμε:

$$\frac{x}{z}=\frac{1-\frac{m^2}{n^2}}{1+\frac{m^2}{n^2}}=\frac{n^2-m^2}{n^2+m^2} \tag{8}$$

Και από την (7)

$$\frac{y}{z}=\frac{2mn}{1+\frac{m^2}{n^2}}=\frac{2mn^2}{n(m^2+n^2)}=\frac{2mn}{m^2+n^2} \tag{9}$$

Από τις σχέσεις (8) και)9), και λίγη σκέψη προκύπτουν όλες οι πρωτογενείς λύσεις της (1) ∎

3.2 Η 3η απόδειξη

Για την απόδειξη αυτή έχουμε ανάγκη από το ακόλουθο λήμμα (το οποίο είναι ειδική περίπτωση του περίφημου θεωρήματος 90 του μεγάλου Γερμανού μαθηματικού David Hilbert (1862-1943).

Λήμμα 1 *Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{Q}$ και $|z| = 1$. Υπάρχουν τότε ακέραιοι a, b τέτοιοι ώστε $z = \frac{a+bi}{a-bi}$*

Αποδειξη Αφού $|z| = 1$ θα έχουμε $z\bar{z} = 1$ άρα $\bar{z} = \frac{1}{z}$ οπότε

$$\frac{1+z}{1+\bar{z}} = \frac{1+z}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1+z}{\frac{1+z}{z}} = z$$

Έτσι

$$z = \frac{1+z}{1+\bar{z}} = \frac{1+x+yi}{1+x-yi}$$

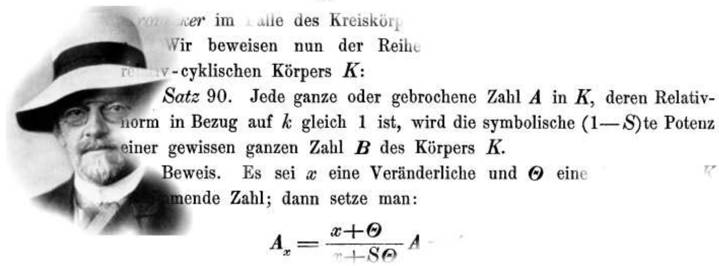
Έστω τώρα

$$x = \frac{m}{n}, y = \frac{M}{N}$$

όπου m, n, M, N ακέραιοι $n, N \neq 0$ Αντικαθιστώντας βρίσκουμε

$$z = \frac{1+\frac{m}{n}+\frac{M}{N}i}{1+\frac{m}{n}-\frac{M}{N}i} = \ldots = \frac{(n+m)N+nMi}{(n+m)N-nMi}$$

Αν θέσουμε $(n+m)N = a$ και $nM = b$ πειθόμεθα για την αλήθεια του λήμματος.



Ο Hilbert και το θεώρημα Hilbert90 στην πρώτη του εμφάνιση (1897)

Για την κυρίως απόδειξη τώρα: Έστω τώρα (x, y, z) μια τριάδα φυσικών αριθμών πρώτων μεταξύ τους οι οποίοι ικανοποιούν την (1) η οποία γράφεται και

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$

Βάζουμε

$$w = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}i$$

Ο w είναι μιγαδικός αριθμός με μέτρο 1 και ρητούς όρους άρα, σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα θα υπάρχουν ακέραιοι m και n τέτοιοι ώστε

$$w = \frac{m+ni}{m-ni}$$

και έτσι θα έχουμε

$$w = \frac{(m+ni)^2}{(m-ni)(m+ni)} = \frac{m^2-n^2 2mni}{m^2+n^2}$$

ή

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{z}i = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} + \frac{2mn}{m^2+n^2}i$$

Επομένως

$$\frac{x}{z} = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

και

$$\frac{y}{z} = \frac{2mn}{m^2+n^2}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι m και n είναι πρώτοι μεταξύ τους οπότε προκύπτει $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$ και$z = m^2 + n^2$.■

3.3 Η 4η απόδειξη

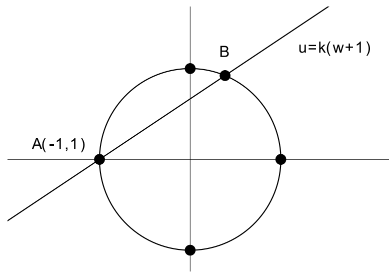
Έστω πάλι (x, y, z) μια τριάδα φυσικών αριθμών πρώτων μεταξύ τους οι οποίοι ικανοποιούν την (1) η οποία γράφεται και

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$

Βάζουμε $w = \frac{x}{z}$ και $u = \frac{y}{z}$, οπότε η προηγούμενη εξίσωση γράφεται

$$w^2 + u^2 = 1$$

η οποία είναι η εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου.



Το σημείο $A(-1, 0)$ είναι, προφανώς, σημείο του κύκλου και αν B είναι ένα άλλο σημείο του ίδιου κύκλου με ρητές συντεταγμένες τότε η εξίσωση $u = k(w+1)$ της AB θα έχει k ρητό αριθμό. Ας υπολογίσουμε τώρα τις συντεταγμένες του B λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων

$$w^2 + u^2 = 1 \quad \text{και} \quad u = k(w+1)$$

Αντικαθιστούμε το $u = k(w+1)$ στην εξίσωση του κύκλου και βρίσκουμε

$$w^2 + (k(w+1))^2 = 1$$

και, έπειτα από μερικές πράξεις, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(1+k^2)w^2 + 2k^2 w + k^2 - 1 = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει δυο ρίζες με γινόμενο $\frac{k^2-1}{1+k^2}$ εκ των οποίων η μια είναι ο αριθμός -1 (αφού το ζεύγος $(-1, 0)$ είναι λύση του συστήματος). Η άλλη λύση της εξίσωσης θα είναι λοιπόν

$$w = \frac{1-k^2}{1+k^2}$$

οπότε από την $u = k(w+1)$ βρίσκουμε

$$u = \frac{2k}{1+k^2}$$

Αν τώρα θέσουμε

$$k = \frac{m}{n}$$

όπου οι m και n είναι πρώτοι μεταξύ τους φθάνουμε στις σχέσεις

$$\frac{x}{z} = \frac{n^2-m^2}{m^2+n^2} \quad \text{και} \quad \frac{y}{z} = \frac{2mn}{m^2+n^2}$$

στις οποίες είχαμε φθάσει και στις προηγούμενες αποδείξεις. ■