Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας

Φύλλο 3, 9 Απριλίου 2010

Στοιχειοθετείται με το LaTeX 2_ε
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com

Γεωμετρικές συνθήκες κυρτότητας

Ροδόλφος Μπόρης

Περίληψη

Η παρακάτω δουλειά απευθύνεται στα παιδιά της Γ′ λυκείου (και όχι μόνο) και σκοπό έχει να τονίσει τις γεωμετρικές ιδιότητες που έχει μια συνάρτηση ώστε να είναι κυρτή ή κοίλη. Χρησιμοποιήθηκε ο ορισμός του σχολικού βιβλίου που ορίζει τις κυρτές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ (ή σε ένα οποιοδήποτε άλλο ανοικτό διάστημα) Οι προτάσεις που ακολουθούν παρουσιάζονται σαν *ικανές* και *αναγκαίες* συνθήκες ώστε μια συνάρτηση να είναι κυρτή ή κοίλη. Έγινε προσπάθεια ώστε να ταιριάζει η γεωμετρική διαίσθηση με την αυστηρή, και φυσικά γοητευτική, γλώσσα της ανάλυσης στο επίπεδο της Γ′ Λυκείου. Αρχικά λοιπόν διατυπώνονται κάποιοι χρήσιμοι ορισμοί και αποδεικνύονται οι παρακάτω προτάσεις που αναφέρουμε συνοπτικά. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε :

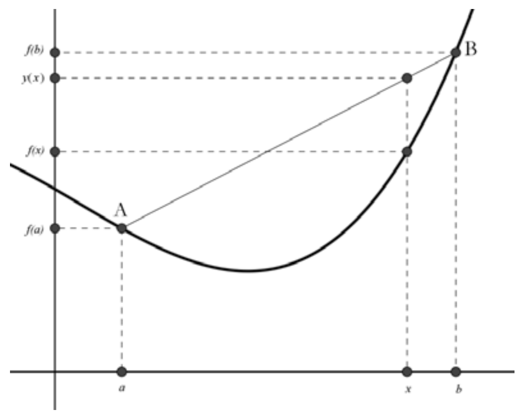
- Αν $f' \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ τότε η f είναι κυρτή, ενώ αν είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.
- Αν οποιαδήποτε χορδή της $\mathcal{C}_f$, είναι πάνω από την $\mathcal{C}_f$, τότε η f είναι κυρτή και αντιστρόφως. Εδώ αναφέρονται και οι ανισότητες Jensen.
- Αν οποιαδήποτε εφαπτομένη (ε) της $\mathcal{C}_f$ βρίσκεται κάτω από την $\mathcal{C}_f$,η f είναι κυρτή και αντιστρόφως.
- Τότε αν η κλίση των χορδών αυξάνεται, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και αντιστρόφως.
- Αν στην $\mathcal{C}_f$ δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία, τότε η f είναι κυρτή ή κοίλη και αντιστρόφως.
- Αν δεν υπάρχουν δυο παράλληλες εφαπτόμενες της $\mathcal{C}_f$, τότε η f είναι κυρτή ή κοίλη και αντιστρόφως.
- Αν η εφαπτόμενη της $\mathcal{C}_f$, έχει με την $\mathcal{C}_f$ μοναδικό κοινό σημείο το σημείο επαφής τότε η f είναι κυρτή ή κοίλη και αντιστρόφως.
- Έστω ότι $f(x) \geq 0$. Αν το εμβαδό του τραπεζίου που ορίζεται από οποιαδήποτε χορδή AB της $\mathcal{C}_f$, είναι μεγαλύτερο, από το εμβαδό που ορίζεται από την $\mathcal{C}_f$, τον άξονα x και τις ευθείες $x = a$, $x = b$, τότε η f είναι κυρτή και αντιστρόφως.
- Ακολουθεί μια σειρά ιδιοτήτων που αφορούν κλίσεις χορδών και φαίνονται στα αντίστοιχα σχήματα που τις συνοδεύουν.
- Και τέλος σε πιο προχωρημένο επίπεδο αναφέρονται και αποδεικνύονται δυο ακόμη προτάσεις (που δεν υπάρχουν στην γνωστή μου βιβλιογραφία).
  A) Η παράγωγος μιας κυρτής (ή κοίλης) συνάρτησης στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής.
  B) Το ξ του θεωρήματος μέσης τιμής είναι συνεχής συνάρτηση του x όταν η f είναι είτε κυρτή είτε κοίλη στο $\mathbb{R}$.

1 Οι Προτάσεις

Στα επόμενα θα είναι $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Πρόταση 1 *Αν η κλίση των εφαπτομένων της $\mathcal{C}_f$ αυξάνεται, η f ονομάζεται κυρτή, ενώ αν μειώνεται, ονομάζεται κοίλη. Πιο αλγεβρικά: Αν $f' \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ τότε η f είναι κυρτή, ενώ αν $f' \downarrow$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.*

Ονομάζουμε χορδή της $\mathcal{C}_f$ οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα AB ενώνει δυο σημεία $A(a, f(a))$ και $B(b, f(b))$ της $\mathcal{C}_f$.

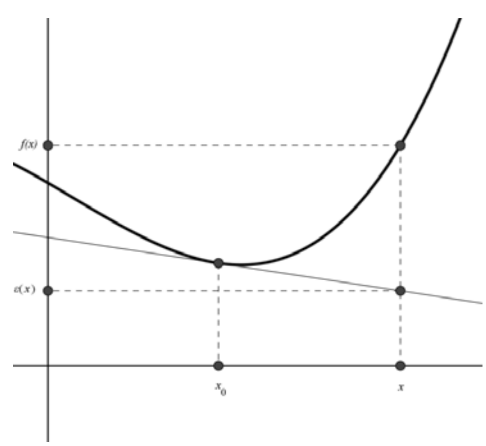


Θα λέμε ότι η χορδή AB είναι πάνω από την $\mathcal{C}_f$ αν $y(x) > f(x)$, $\forall x \in (a, b)$ και είναι αυτονόητο ότι $y(a) = f(a)$, $y(b) = f(b)$. Τότε:

Πρόταση 2 *Αν οποιαδήποτε χορδή της $\mathcal{C}_f$, είναι πάνω από την $\mathcal{C}_f$, τότε η f είναι κυρτή και αντιστρόφως (αντίστοιχα για κοίλη).*

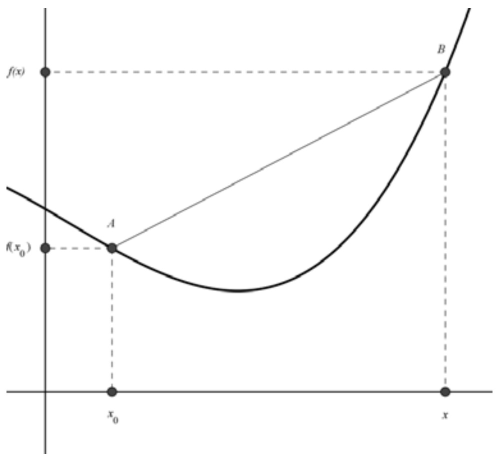
Λέμε ότι η εφαπτομένη (ε) της $\mathcal{C}_f$, βρίσκεται κάτω από την $\mathcal{C}_f$ όταν οποιοδήποτε σημείο της (ε), εκτός του σημείου επαφής, έχει μικρότερη τεταγμένη από την τεταγμένη του σημείου της $\mathcal{C}_f$ με την ίδια τετμημένη. Τότε:

Πρόταση 3 *Αν οποιαδήποτε εφαπτομένη (ε) της $\mathcal{C}_f$, βρίσκεται κάτω από την $\mathcal{C}_f$, η f είναι κυρτή και αντιστρόφως (αντίστοιχα για κοίλη).*



Ονομάζουμε **κλίση της χορδής** AB τον αριθμό $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Για να πούμε ότι η κλίση αυξάνεται πρέπει, να την θεωρήσουμε ως συνάρτηση. Για αυτό θεωρούμε σταθερό το a και μεταβλητή το b. Έτσι θέτουμε, $a = x_0$, $b = x$ με $x, x_0 \in \mathbb{R}$ και σαν κλίση χορδής θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$



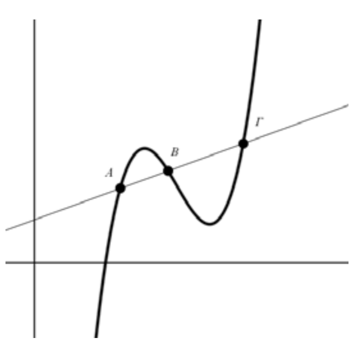
Με την κατασκευή αυτή μπορούμε να αποδείξουμε ότι η g είναι συνεχής Επειδή η g εξαρτάται από το x_0, ένας καλύτερος συμβολισμός που να δηλώνει αυτό το γεγονός, είναι:

$$g_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \neq x_0 \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

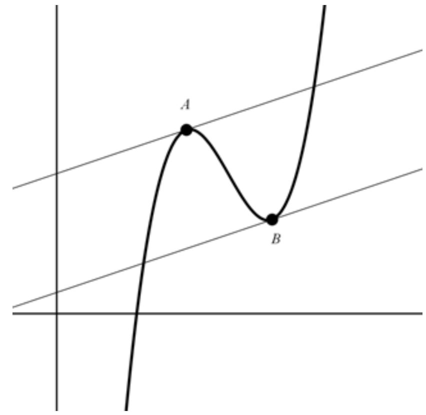
οπότε η $g_{x_0}(x)$ παριστάνει την κλίση χορδής με άκρο σημείο της $\mathcal{C}_f$ που έχει τετμημένη x_0. Τότε:

Πρόταση 4 *Αν η κλίση των χορδών αυξάνεται, δηλαδή $g \uparrow$ στο $\mathbb{R}$ για οποιοδήποτε x_0 του πεδίου ορισμού της f, η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και αντιστρόφως. (Αντίστοιχα για κοίλη).*

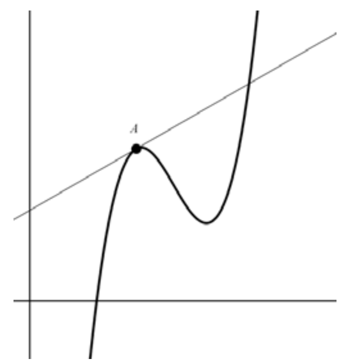
Πρόταση 5 *Αν στην $\mathcal{C}_f$ δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία, τότε η f είναι κυρτή ή κοίλη και αντιστρόφως.*



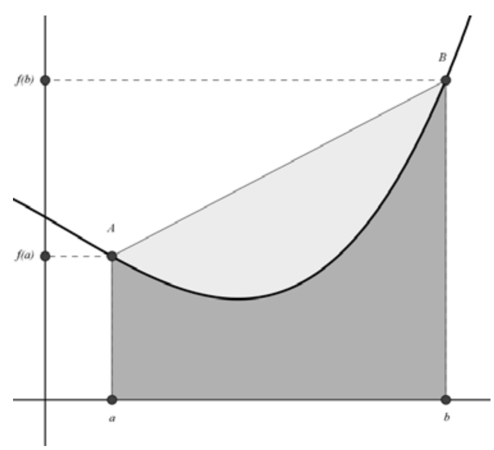
Πρόταση 6 *Αν δεν υπάρχουν δυο παράλληλες εφαπτόμενες της $\mathcal{C}_f$, τότε η f είναι κυρτή ή κοίλη και αντιστρόφως.*



Πρόταση 7 *Αν οποιαδήποτε εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την $\mathcal{C}_f$ παρά μόνο το σημείο επαφής, τότε η f είναι κυρτή ή κοίλη και αντιστρόφως.*



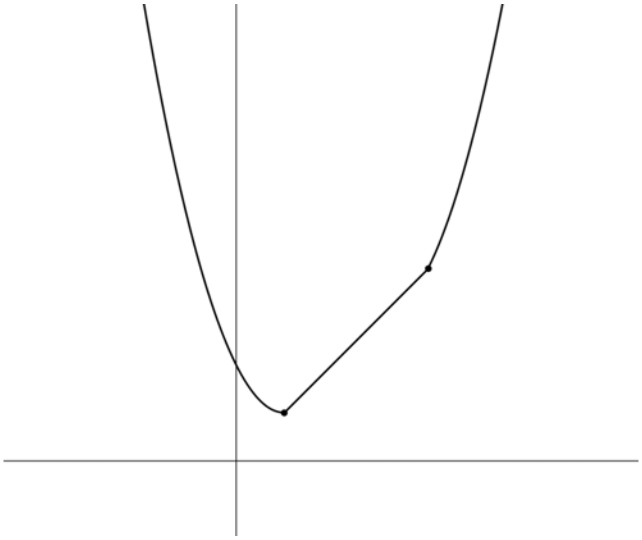
Πρόταση 8 *Ας υποθέσουμε για λόγους απλούστευσης ότι $f(x) \geq 0$. Αν το εμβαδό του τραπεζίου που ορίζεται από οποιαδήποτε χορδή AB της $\mathcal{C}_f$, τον άξονα x και τις ευθείες $x = a$, $x = b$ είναι μεγαλύτερο, από το εμβαδό που ορίζεται από την $\mathcal{C}_f$ τον άξονα x και τις ευθείες $x = a$, $x = b$, τότε η f είναι κυρτή και αντιστρόφως. (Αντίστοιχα για κοίλη).*



2 Αποδείξεις των προτάσεων και σχόλια

2.1 Για την Πρόταση 1

Η πρόταση 1 αποτελεί ορισμό (του σχολικού βιβλίου) και δεν την αποδεικνύουμε. Σε άλλα βιβλία, υπάρχουν πιο γενικοί ορισμοί που δεν απαιτούν π.χ. την παραγωγισιμότητα της συνάρτησης και δέχονται την ύπαρξη γωνιακών σημείων.
Έτσι δίνουν ως εικόνα κυρτής συνάρτησης κάτι σαν το παρακάτω σχήμα:



2.2 Για την Πρόταση 2

2.2.1 Το ευθύ

Έστω $a < b$. Θεωρούμε την χορδή

$$y(x) = f(a) + m(x-a)\ ,\ m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{1}$$

Η y έχει επίσης εξίσωση

$$y(x) = f(b) + m(x-b) \tag{2}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$y(x) > f(x)\ \ ,\ \forall x \in (a,b) \tag{3}$$

Για $x > a$ η (3) λόγω της (1) γράφεται

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < m \tag{4}$$

Παίρνουμε όρια της (4) όταν $x \to a^+$ και λαμβάνουμε υπ' όψη ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε προκύπτει:

$$f'(a) \leq m \tag{5}$$

Για $x < b$ εντελώς ανάλογα προκύπτει

$$m \leq f'(b) \tag{6}$$

Τελικά

$$\forall a < b\ \Rightarrow\ f'(a) \leq f'(b) \tag{7}$$

άρα f' ↥. Προκειμένου να εξασφαλίσουμε και το γνησίως, εργαζόμαστε ως εξής: Αν υπάρχουν $a < b$ ώστε $f'(a) = f'(b)$ τότε για $a \leq x \leq b$ επειδή θα ισχύει η σχέση $f'(a) \leq f'(x) \leq f'(b) \overset{f'(a)=f'(b)}{\Rightarrow} f'(x) = f'(a)\ \forall x \in [a,b]$ που σημαίνει ότι η χορδή AB ταυτίζεται με την συνάρτηση και δεν βρίσκεται πάνω από αυτήν. Άτοπο εξ' υποθέσεως. Δηλαδή $\forall a < b\ \Rightarrow\ f'(a) < f'(b)$ οπότε εξ' ορισμού η f είναι κυρτή.

2.2.2 Το αντίστροφο

Θα αποδείξουμε πρώτα το:

Λήμμα 1 *Αν w' ↥ στο $[a,b]$ και $w(a) = w(b) = 0$ τότε $w(x) < 0\ \forall x \in (a,b)$*

Απόδειξη: Αφού w παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής στο $[a,b]$. Προφανώς w παραγωγίσιμη στο (a,b) και $w(a) = w(b)$. Τότε από το θεώρημα Rolle θα υπάρχει μοναδικό ξ στο (a,b) ώστε: $w'(\xi) = 0$. (Η μοναδικότητα προκύπτει επειδή w ↥)

$$\left.\begin{array}{c} w' \text{ ↥ στο } [a,\xi] \\ a < x < \xi \end{array}\right\} \Rightarrow w'(x) < w'(\xi) = 0\ \forall x \in (a,\xi) \tag{8}$$

$$\left.\begin{array}{c} w' \text{ ↧ στο } [\xi,b] \\ \xi < x < b \end{array}\right\} \Rightarrow w'(x) > w'(\xi) = 0\ \forall x \in (\xi,b) \tag{9}$$

Από τις (8), (9) και αφού η w είναι συνεχής στο $[a,b]$ προκύπτει ότι w ↥ στο $[a,\xi]$ και και w ↧ στο $[\xi,b]$. Άρα

$$\left.\begin{array}{c} w \text{ ↥ στο } [a,\xi] \\ a < x \leq \xi \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = w(a) > w(x)\ \ \forall x \in (a,\xi] \tag{10}$$

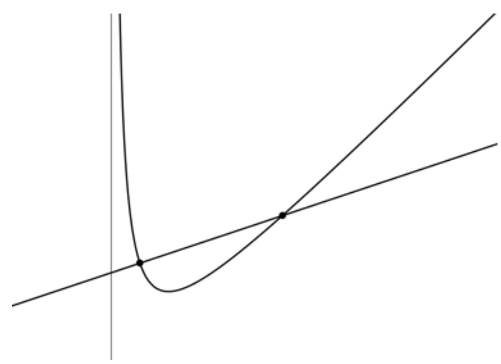
$$\left.\begin{array}{c} w \text{ ↧ στο } [\xi,b] \\ \xi \leq x < b \end{array}\right\} \Rightarrow w(x) < w(b) = 0\ \forall x \in [\xi,b) \tag{11}$$

Οι (10), (11) αποδεικνύουν το ζητούμενο $w(x) < 0$ στο (a,b)

Η απόδειξη του αντιστρόφου Ας αποδείξουμε τώρα το αντίστροφο της πρότασης 2. Θέτουμε $w(x) = f(x) - y(x)\ ,\ \forall x \in [a,b]$. Οι συναρτήσεις f, y ορίστηκαν προηγουμένως από την (1 και (2). Τότε παρατηρούμε ότι $w'(x) = f'(x) - m$, οπότε είναι w' ↥ στο $[a,b]$ αφού f' ↥ στο $[a,b]$ και $w(a) = w(b) = 0$, οπότε με βάση το λήμμα 1, συμπεραίνουμε ότι ισχύει $w(x) < 0 \Leftrightarrow y(x) > f(x)\ ,\ \forall x \in (a,b)$ που αποδεικνύει ότι πράγματι η χορδή βρίσκεται πιο πάνω από την συνάρτηση.

2.2.3 Παρατηρήσεις

Α) Μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι: Εκτός του $[a,b]$, η συνάρτηση f, βρίσκεται πιο ψηλά από την χορδή της y. Η απόδειξη είναι εντελώς όμοια με το αντίστροφο επεκτείνοντας τις (10) και (11) αριστερά του a και δεξιότερα του b.



Β) Τα ίδια πράγματα ισχύουν αν το πεδίο ορισμού της f ήταν οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα (κ,λ)

Γ) Χρησιμοποιώντας την πρόταση 2 παίρνουμε τις περίφημες ανισότητες Jensen που θα αναφέρουμε αμέσως παρακάτω.

Λήμμα 2 *Αν $c \in [a,b]$ υπάρχουν μοναδικοί μη αρνητικοί αριθμοί κ,λ ώστε $k + \lambda = 1\ :\ c = ka + \lambda b$ και αντιστρόφως.*

Αποδειξη Έστω

$$a \le c \le b \text{ τότε } \le c-a \le b-a \text{ άρα } 0 \le \frac{c-a}{b-a} \le 1 \qquad (12)$$

Θέτουμε

$$\frac{c-a}{b-a} = t \qquad (13)$$

οπότε από την (12) είναι

$$0 \le t \le 1 \qquad (14)$$

Από την (13) λύνοντας ως προς c παίρνουμε:

$$c = (1-t)a + tb \qquad (15)$$

Θέτοντας : $\kappa = 1-t$, $\lambda = t$ και λόγω της (14) προκύπτει άμεσα το ζητούμενο

Λήμμα 3 *Αν $k \ge 0, \lambda \ge 0, k+\lambda = 1$ τότε υπάρχουν μη αρνητικοί αριθμοί p, q όχι όλοι μηδενικοί ώστε $k = \frac{p}{p+q}$, $\lambda = \frac{q}{p+q}$*

Αποδειξη Έστω $k \ge 0$, $\lambda \ge 0$, $k+\lambda = 1$. Τότε $k \le 1$ αφού $k = 1-\lambda \le 1$ και αντίστοιχα για το λ. Άρα μπορώ να θέσω $k = \frac{p}{p+q}$ με $p \ge 0, q \ge 0, p+q \ne 0$. Τότε και επειδή $\lambda = 1-k$ θα είναι $\lambda = 1 - \frac{p}{p+q} = \frac{q}{p+q}$ Αντιστρόφως : Αν $k = \frac{p}{p+q}$, $\lambda = \frac{q}{p+q}$ με $p \ge 0, q \ge 0, p+q \ne 0$ τότε εύκολα προκύπτουν ότι: $k \ge 0$, $\lambda \ge 0$, $k+\lambda = 1$. Από τα λήμματα [2] και [3] συμπεραίνουμε ότι ο οποιοσδήποτε αριθμός c του $[a,b]$ μπορεί να παρασταθεί με δυο ισοδύναμους τρόπους: Είτε σαν

$$c = ka + \lambda b \text{ με} k \ge 0, \lambda \ge 0, k+\lambda = 1 \qquad (16)$$

Είτε σαν

$$c = \frac{p}{p+q}a + \frac{q}{p+q}b \text{ με } p \ge 0, q \ge 0, p+q \ne 0 \qquad (17)$$

Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να γράψουμε τις ανισότητες Jensen σε δυο μορφές Αν f κυρτή στο [α,β] τότε

$$\begin{gathered} f(kx+\lambda y) \le kf(x) + \lambda f(y) \\ x,y \in [a,b],\ k \ge 0,\ \lambda \ge 0,\ k+\lambda = 1 \end{gathered} \qquad (18)$$

$$\begin{gathered} f\left(\frac{p}{p+q}x + \frac{q}{p+q}y\right) \le \frac{p}{p+q}f(x) + \frac{q}{p+q}f(y) \\ x,y \in [a,b],\ p \ge 0,\ q \ge 0,\ p+q = 1 \end{gathered} \qquad (19)$$

Οι ανισότητες αντιστρέφονται αν f κοίλη και η ισότητα ισχύει μόνον όταν $x = y$. Ονομάζονται ανισότητες Jensen για δυο αριθμούς. Η κυρτότητα σε κλειστό διάστημα απαιτεί την συνέχεια της f στα άκρα και $f' \uparrow$ στο εσωτερικό του διαστήματος.

Γενικευση των ανισοτητων Jensen

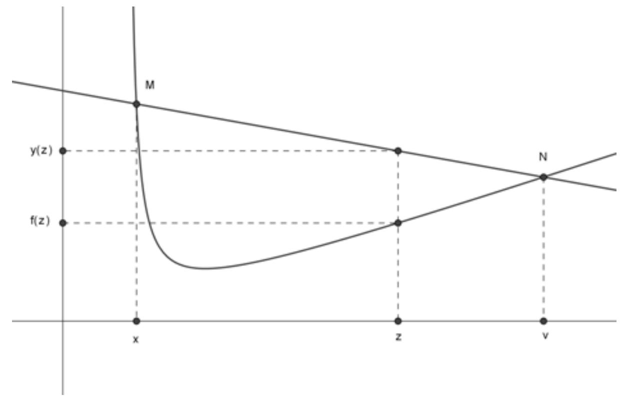
Μορφή Α) ανισότητας Jensen όταν f κυρτή στο $[a,b]$

$$\begin{gathered} f(k_1x_1 + \dots + k_nx_n) \le k_1f(x_1) + \dots + k_nf(x_n) \\ x_i \in [a,b], , k_i \in [0,1], , k_1 + k_2 + \dots + k_n = 1 \end{gathered} \qquad (20)$$

Μορφή Β) ανισότητας Jensen όταν f κυρτή στο $[a,b]$

$$\begin{gathered} f\left(\frac{p_1x_1}{p_1+\dots+p_n} + \dots + \frac{p_nx_n}{p_1+\dots+p_n}\right) \le \frac{p_1f(x_1)}{p_1+\dots+p_n} + \dots + \frac{p_nf(x_n)}{p_1+\dots+p_n} \\ x_i \in [a,b],\ p_i \ge 0,\ p_1+p_2+\dots+p_n \ne 0 \end{gathered} \qquad (21)$$

Αποδειξη της ανισότητας για δυο αριθμούς στην πρώτη μορφή: Ο αριθμός $z = kx + \lambda y$ παριστάνει το οποιοδήποτε $z \in [a,b]$ λόγω του λήμματος 2 Το $kf(x) + \lambda f(y)$ είναι η τεταγμένη $y(z)$ της χορδής ΜΝ με τετμημένη το z



Από την (18) έχουμε $f(z) \le y(z)$ που είναι το ζητούμενο. Αποδειξη της απλής ανισότητας στην δεύτερη μορφή Λόγω του λήμματος 3 η (18) είναι ισοδύναμη με την (19). Αποδειξη της γενικευμένης ανισότητας στην πρώτη μορφή. Θα αποδείξουμε την (20) για τρεις παράγοντες και η γενίκευση είναι άμεση. Έτσι θα δείξουμε ότι $f(kx+\lambda y+mz) \le kf(x) + \lambda f(y) + mf(z)$, $x,y,z \in [a,b]$, $k \ge 0$, $\lambda \ge 0$, $m \ge 0$, $k+\lambda+m = 1$ Έχουμε:
$f(kx+\lambda y+mz) = f((kx+\lambda y)+mz)) =$
$= f\left((1-m)(\frac{kx+\lambda y}{1-m}) + mz\right) =$
$= f\left((1-m)(\frac{kx+\lambda y}{k+\lambda}) + mz\right) =$
$\le (1-m)f(\frac{kx+\lambda y}{k+\lambda}) + mf(z) = (k+l)f(\frac{kx+\lambda y}{k+\lambda}) + mf(z) =$
$= (k+\lambda)f(\frac{k}{k+\lambda}x + \frac{\lambda}{k+\lambda}y) + mf(z) \le$
$\le (k+\lambda)\left(f(\frac{k}{k+\lambda}x) + f(\frac{\lambda}{k+\lambda}y)\right) + mf(z)$
$\le (k+\lambda)\left(\frac{k}{k+\lambda}f(x) + \frac{\lambda}{k+\lambda}f(y)\right) + mf(z) = kf(x) + \lambda f(y) + mf(z)$ Η ισοδυναμία των (20) και (21) είναι προφανής λόγω του λήμματος 3.

2.3 Για την Πρόταση 3

2.3.1 Το ευθύ

Έστω

$$\varepsilon(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \qquad (22)$$

η εξίσωση της εφαπτομένης της f με σημείο επαφής το $M(x_0, f(x_0))$. Δίνεται ότι

$$\begin{gathered} f(x) \ge \varepsilon(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ \text{με το «=» να ισχύει για } x = x_0 \end{gathered} \qquad (23)$$

Έστω $x_1 < x_2$. Εξίσωση εφαπτομένης της f στο x_1 είναι

$$\varepsilon(x) = f(x_1) + f'(x_0)(x-x_1) \qquad (24)$$

Τότε λόγω των (23) και (24) βάζοντας στην (24) όπου $x = x_2$ είναι

$$\begin{gathered} f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1)(x_2-x_1) \text{ ή} \\ \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > f'(x_1) \end{gathered} \qquad (25)$$

Αντίστοιχα θεωρώντας την εξίσωση εφαπτομένης της f στο x_2 καταλήγουμε στην

$$f'(x_2) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{26}$$

Από (25), (26) είναι $f' \uparrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα f κυρτή.

2.3.2 Το αντίστροφο

Θέτουμε

$$h(x) = f(x) - \varepsilon(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \tag{27}$$

Τότε επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στο $[x, x_0]$ (ή στο $[x_0, x]$), έχουμε: $h(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, $\xi \in (x, x_0)$ ή

$$h(x) = (x - x_0)\left(f'(\xi) - f'(x_0)\right) \quad , \quad x < \xi < x_0 \tag{28}$$

Επειδή όμως f κυρτή η f' θα είναι γνήσια αύξουσα στο $[x, x_0]$ (ή στο $[x_0, x]$) Τότε:

$$\left.\begin{array}{c} f' \uparrow \text{στο}\,[x, x_0] \\ x < \xi < x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(\xi) < f'(x_0) \Rightarrow f'(\xi) - f'(x_0) < 0 \tag{29}$$

Λόγω της (29) και επειδή $x < x_0$ από την (28) προκύπτει ότι

$$h(x) > 0 \tag{30}$$

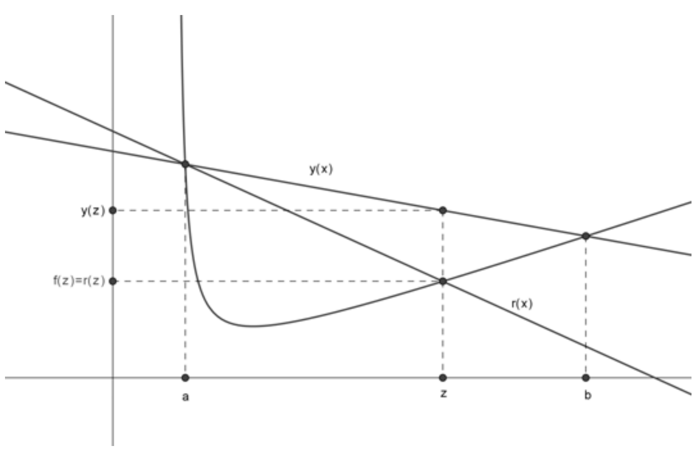
Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και όταν $x > x_0$. Η ισότητα ισχύει μόνον όταν $x = x_0$, δηλαδή μόνον στο σημείο επαφής. Τελικά η (30) αποδεικνύει ότι η οποιαδήποτε εφαπτομένη (ε) της $\mathcal{C}_f$, βρίσκεται κάτω από την $\mathcal{C}_f$.

2.4 Για την Πρόταση 4

2.4.1 Το ευθύ

Για την απόδειξη της τέταρτης πρότασης έχουμε: Θα δείξουμε ότι με τα δεδομένα της πρότασης 4 προκύπτει η πρόταση 2. Δηλαδή αν η συνάρτηση g, όπως ορίζεται στην πρόταση 4, είναι γνήσια αύξουσα, τότε η χορδή $y(x)$, όπως ορίζεται στην πρόταση 2, βρίσκεται πάνω από την $\mathcal{C}_f$, γεγονός που εξασφαλίζει ότι η f είναι κυρτή. Έστω λοιπόν $a < b$ Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε τις χορδές με ένα άκρο το α και θα δείξουμε ότι $\forall z \in (a, b)$ προκύπτει $f(z) < y(z)$, όπου η y ορίστηκε από την [1] και είναι

$$y(x) = f(a) + m(x - a)\ ,\ m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Θέτουμε

$$r(x) = f(a) + m_1(x - a)\ ,\ m_1 = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \tag{31}$$

Παρατηρούμε ότι $m = g(b)$, $m_1 = g(z)$. Επειδή $z < b$ και η g είναι γνήσια αύξουσα θα είναι $g(z) < g(b)$. Άρα

$$m_1 < m \tag{32}$$

Ακόμη

$$y(z) = f(a) + m(z - a)\ ,\ r(z) = f(a) + m_1(z - a) \tag{33}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη, (αφού $m > m1$, $z > a$) είναι:

$$y(z) - r(z) = (m - m_1)(z - a) > 0 \tag{34}$$

Από την (31) για $x = z$ εύκολα προκύπτει ότι $r(z) = f(z)$, οπότε λόγω της (34) θα είναι $y(z) > f(z)$ που αποδεικνύει το ζητούμενο.

2.4.2 Το αντίστροφο

Θα αποδείξουμε πρώτα το:

Λήμμα 4 *Η συνάρτηση*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\ , & x \neq x_0 \\ f'(x_0)\ , & x = x_0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - x_0$ και συνεχής στο x_0

Απόδειξη Πράγματι επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πηλίκο στο $\mathbb{R} - x_0$. Η g είναι συνεχής στο x_0 διότι $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = g(x_0)$. Για την απόδειξη του αντιστρόφου της πρότασης 4 έχουμε

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^2}\ \ ,\ x \neq x_0 \tag{35}$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f ανάμεσα στα x και $x0$, οπότε αντικαθιστώντας στην (35) και απλοποιώντας με $x - x_0$ παίρνουμε:

$$g'(x) = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x - x_0}\ \ ,\ x \neq x_0 \tag{36}$$

Αν $x < x_0$ τότε

$$\left.\begin{array}{c} f' \downarrow \text{ στο}\,[x, x_0] \\ x < \xi < x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(\xi) > f'(x) \Rightarrow g'(x) > 0\, \forall x < x_0 \tag{37}$$

Αν $x > x_0$ τότε

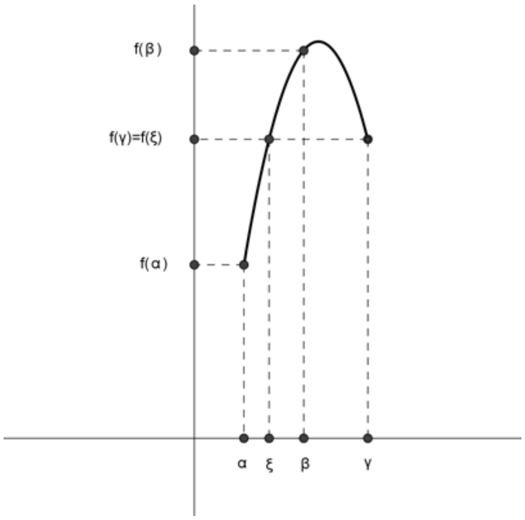
$$\left.\begin{array}{c} f' \uparrow \text{ στο}\,[x, x_0] \\ x_0 < \xi < x \end{array}\right\} \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow g'(x) > 0\, \forall x > x_0 \tag{38}$$

Από τις (37),(38) και επειδή η g είναι συνεχής στο x_0 προκύπτει ότι η g είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ που είναι και το ζητούμενο.

Πριν την απόδειξη προηγείται ένα λήμμα

Λήμμα 5 *Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και ένα προς ένα τότε είναι γνήσια μονότονη.*

Αποδειξη Θα υποθέσουμε αρχικά ότι η f δεν είναι μονότονη και θα καταλήξουμε σε άτοπο Αν η f ήταν γνήσια μονότονη τότε για κάθε τριάδα α, β, γ, με $\alpha < \beta < \gamma$ θα ίσχυε $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$ στην περίπτωση που ήταν γνήσια αύξουσα και αντίστροφα στην περίπτωση που ήταν γνήσια φθίνουσα. Αφού όμως δεν είναι γνήσια μονότονη θα υπάρχουν $\alpha < \beta < \gamma$ π.χ με $f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma)$).



Εφόσον f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ θα παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στο $f(\alpha)$ και στο $f(\beta)$ και άρα υπάρχει κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$: $\mathrm{f}(\xi) = \mathrm{f}(\gamma)$. Επειδή η f είναι και 1 - 1 πρέπει $\xi = \gamma$. Έτσι $\gamma = \xi < \beta$ ενώ $\gamma > \beta$ άτοπο.

2.5 Για την Πρόταση 5

2.5.1 Το ευθύ

Για την απόδειξη της πέμπτης πρότασης έχουμε: Είναι

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \in R - \{x_0\} \\ f'(x_0), & x = x_0 \end{cases}$$

Αφού στην $\mathcal{C}_f$ δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία τότε θα έχουμε

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{x_0\} \ \mu\varepsilon \ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2) \tag{39}$$

Αλλιώς αν με $x_1 \neq x_2$ είχαμε $g(x_1) = g(x_2)$ τότε τα σημεία: $M_0(x_0, f(x_0))$, $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2)$ της γραφικής παράστασης της f θα ήταν συνευθειακά αφού αν $g(x_1) = g(x_2)$, οι συντελεστές διεύθυνσης των M_1M_0 και M_2M_0 είναι τα $g(x_1), g(x_2)$ και θα ήταν ίσοι πράγμα που σημαίνει ότι τα M_0, M_1,M_2 είναι συνευθειακά, άτοπο. Αν τώρα κάποιο από τα x_1, x_2 ήταν το x_0 και πάλι θα ισχύει η (39). Έστω $x_1 \neq x_0 = x_2$ θα δείξουμε ότι και πάλι θα ισχύει $g(x_1) \neq g(x_0)$ καταφεύγοντας για μια ακόμη φορά στην απαγωγή στο άτοπο. Έστω λοιπόν ότι

$$g(x_1) = g(x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) \tag{40}$$

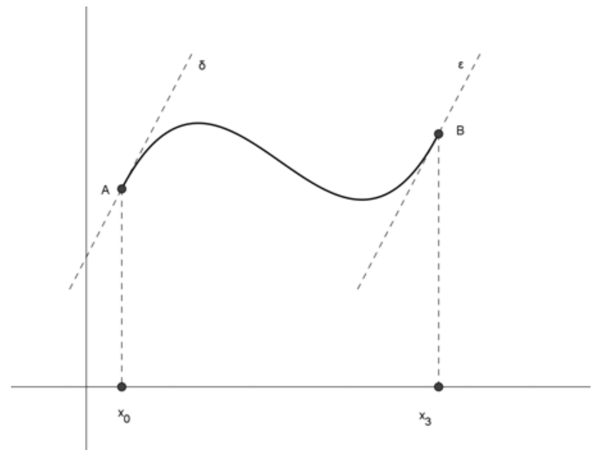
Από το Θ.Μ.Τ για την f στο $[x_0, x_1]$ (ή $[x_1, x_0]$) προκύπτει από την (40) ότι :

$$f'(x_3) = f'(x_0) \tag{41}$$

με x_3 ανάμεσα στα x_1, x_0 Ακόμη θα είναι

$$\frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} \neq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{42}$$

αλλιώς τα διαφορετικά σημεία $A(x_0, f(x_0)$, $\Gamma(x_1, f(x_1)$, $B(x_3, f(x_3)$ της $\mathcal{C}_f$ θα ήταν συνευθειακά πράγμα άτοπο. Από την (41) προκύπτει ότι στην $\mathcal{C}_f$ υπάρχουν δυο παράλληλες μη κατακόρυφες εφαπτόμενες και θα συμπεράνουμε ότι στην $\mathcal{C}_f$ υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία οπότε θα οδηγηθούμε σε άτοπο.



Πράγματι αν η $\mathcal{C}_f$ δεν τέμνει την $y(x) = AB$ ανάμεσα στα A και B, τότε η εξίσωση $f(x) - y = 0$ δεν θα έχει λύση στο (x_0, x_3) και επειδή η συνάρτηση $f(x) - y$ είναι συνεχής θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (x_0, x_3), έστω θετικό. δηλαδή

$$f(x) - y > 0 \text{ για κάθε } x \in (x_0, x_3) \tag{43}$$

Τότε

$$f(x) > f(x_3) + \lambda_{AB}(x - x3) \tag{44}$$

$$f(x) > f(x_0) + \lambda_{AB}(x - x0) \tag{45}$$

για $x_0 < x < x_3$ αφού και οι δυο παραστάσεις $f(x_3) + \lambda_{AB}(x - x3)$ και $f(x_0) + \lambda_{AB}(x - x0)$ παριστάνουν την εξίσωση της ευθείας ΑΒ με συντελεστή διεύθυνσης το λ_{AB}. Από τις σχέσεις (44),(45) επειδή $(x - x_3) < 0 < (x - x_0)$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(x_3)}{x - x_3} < \lambda_{\mathrm{AB}} < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{46}$$

Παίρνοντας όρια όταν $x \to x_3^-$ και $x \to x_0^+$ σε κάθε μια από τις δυο προηγούμενες ανισότητες προκύπτει:

$$f'(x_3) \le \lambda_{\mathrm{AB}} \le f'(x_0) \tag{47}$$

Από (41),(47) έχουμε:

$$f'(x_3) = \lambda_{\mathrm{AB}} = f'(x_0) \tag{48}$$

Όμως $\lambda_{\mathrm{AB}} = \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0}$ οπότε αντικαθιστώντας στην (48) έχουμε από την (40) ότι :

$$f'(x_3) = \lambda_{\mathrm{AB}} = \frac{f(x_3) - f(x_0)}{x_3 - x_0} = f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

που είναι άτοπο λόγω της (42). Έτσι σε κάθε περίπτωση ισχύει

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ \mu\varepsilon \ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$$

και επειδή η g είναι συνεχής λόγω του λήμματος 5 είναι και γνήσια μονότονη. Στην περίπτωση όπου η g είναι γνήσια αύξουσα λόγω της πρότασης 4 η f είναι κυρτή, ενώ αν η g είναι γνήσια φθίνουσα η g είναι κοίλη.

2.5.2 Το αντίστροφο

Αν f κυρτή ή κοίλη, τότε εξ ορισμού η $f'(x)$ θα είναι είτε γνήσια αύξουσα, είτε γνήσια φθίνουσα, άρα σε κάθε περίπτωση

$$\text{η } f' \text{ είναι } 1-1 \tag{49}$$

Έστω ότι υπήρχαν τρία συνευθειακά σημεία $M_0(x_0, f(x_0))$, $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$ στην $\mathcal{C}_f$ με $x_0 < x_1 < x_2$ Τότε οι συντελεστές διεύθυνσης των M_1M_2 και M_0M_1 θα είναι ίσοι που σημαίνει ότι

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \tag{50}$$

Επειδή ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής για την f στα $[x_0, x_1]$ και $[x_1, x_2]$ αντικαθιστούμε στην (50) και έχουμε

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \text{ με } x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 \tag{51}$$

δηλαδή με $\xi_1 \neq \xi_2$ είναι $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ άτοπο λόγω της (49).

2.6 Για την Πρόταση 6

2.6.1 Το ευθύ

Η απόδειξη της έκτης πρότασης έχει ήδη γίνει στην προηγούμενη πρόταση 5. Έστω λοιπόν ότι δεν υπάρχουν δυο παράλληλες εφαπτόμενες της $\mathcal{C}_f$ Αν στην $\mathcal{C}_f$ υπήρχαν τρία συνευθειακά σημεία $M_0(x_0, f(x_0))$, $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$ τότε θα ίσχυε η (50). Από την (50) προκύπτει η (51) που εξασφαλίζει ότι υπάρχουν δυο παράλληλες εφαπτόμενες της $\mathcal{C}_f$ πράγμα άτοπο από υπόθεση. Συνεπώς στην $\mathcal{C}_f$ δεν υπάρχουν τρία συνευθειακά σημεία. Τότε η f είναι κυρτή ή κοίλη λόγω της πρότασης 5.

2.6.2 Το αντίστροφο

Αν f κυρτή ή κοίλη τότε εξ ορισμού η $f'(x)$ θα είναι είτε γνήσια αύξουσα, είτε γνήσια φθίνουσα, άρα σε κάθε περίπτωση 1-1. Δηλαδή $\forall \xi_1 \neq \xi_2$ είναι $f'(\xi_1) \neq f'(\xi_2)$ που εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχουν δυο παράλληλες εφαπτόμενες της $\mathcal{C}_f$.

2.7 Για την Πρόταση 7

2.7.1 Το ευθύ

Πριν την απόδειξη της πρότασης 7 προηγείται ένα λήμμα

Λήμμα 6 *Με τις προϋποθέσεις της πρότασης 7 υπάρχουν δυο μη παράλληλες εφαπτόμενες της* $\mathcal{C}_f$.

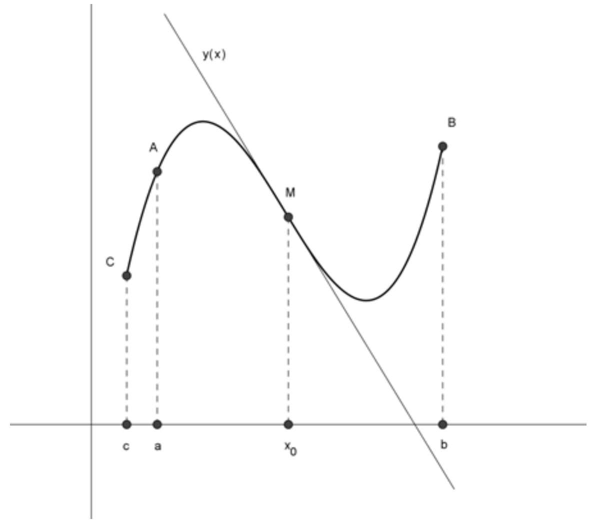
Απόδειξη Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το ζητούμενο. Τότε θα έπρεπε $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x_1) = f'(x_2) \Rightarrow f'(x) = c \Rightarrow f(x) = cx + c_1$ Οπότε η $\mathcal{C}_f$ θα ήταν ευθεία και οποιαδήποτε εφαπτομένη της θα είχε άπειρα κοινά σημεία με την f αφού θα ταυτιζόταν με την f. Άτοπο.

Για την απόδειξη της έβδομης πρότασης έχουμε: Αφού οποιαδήποτε εφαπτομένη $y(x)$ της $\mathcal{C}_f$ δεν τέμνει πουθενά την $\mathcal{C}_f$ εκτός από το σημείο επαφής $M_0(x_0, f(x_0))$, τότε στο $(x_0, +\infty)$ η συνεχής συνάρτηση $f(x) - y(x)$ θα διατηρούσε σταθερό πρόσημο. Έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι

$$f(x) - y(x) > 0\ ,\ \forall x > x_0 \tag{52}$$

Με το ίδιο σκεπτικό στο $(-\infty, x_0)$ πάλι θα διατηρούσε σταθερό πρόσημο. Αν τα πρόσημα αυτά ήταν ίδια η τυχαία εφαπτομένη θα βρισκόταν «κάτω» από την $\mathcal{C}_f$ (ή «πάνω») οπότε λόγω της πρότασης 3 θα ήταν κυρτή (ή κοίλη). Αν τα πρόσημα αυτά δεν είναι ίδια τότε λόγω της (52) θα έχουμε

$$f(x) - y(x) < 0\ ,\ \forall x < x_0 \tag{53}$$



Σύμφωνα με τα προηγούμενα η κλίση της $MC = g(c)$, όπου η g ορίστηκε στην πρόταση 4, είναι μεγαλύτερη από την κλίση της $y(x) = f'(x_0) = g(x_0)$ καθώς και η κλίση της $MB = g(b)$ είναι και αυτή επίσης μεγαλύτερη της κλίσης της $y(x)$ δηλαδή

$$g(c) > g(x_0)\,,\ c < x_0 \tag{54}$$

και

$$g(b) > g(x_0)\ ,\ x_0 < b \tag{55}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι:

$$g(b) < g(c) \tag{56}$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[c, x_0]$ θα παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στα $g(x_0)$ και $g(c)$, άρα και την $g(b)$ λόγω των (55), (56) που σημαίνει ότι:

$$\text{υπάρχει } a \in (c, x_0) \text{ ώστε } g(a) = g(b) \tag{57}$$

Η (57) εξασφαλίζει ότι τα A, M, B είναι συνευθειακά σημεία της $\mathcal{C}_f$ άρα θα είναι

$$\frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{58}$$

Τώρα θα δείξουμε ότι υπάρχει εφαπτομένη της $\mathcal{C}_f$ στο $(\xi, f(\xi))$ με $a < \xi < x_0$ η οποία να διέρχεται από το $(b, f(b))$ που είναι άτοπο από την υπόθεση της πρότασης 7. Έτσι στις (52), (53) τα πρόσημα θα έπρεπε να είναι ίδια, οπότε λόγω της πρότασης 3, η f θα είναι κυρτή ή κοίλη Θα δείξουμε λοιπόν ότι υπάρχει ξ ώστε:

$$f(b) = f(\xi) + f'(\xi)(b - \xi) \tag{59}$$

Θέτω

$$q(x) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}\ \ x \in [a, x_0]$$

Η q είναι καλά ορισμένη συνεχής στο $[a, x_0]$, παραγωγίσιμη στο (a, x_0) και είναι $q(x_0) = q(a)$ λόγω της (58). Από το θεώρημα Rolle υπάρχει ξ στο (a, x_0) ώστε: $q'(\xi) = 0$. Μετά την παραγώγιση, αντικαθιστώντας όπου x το ξ προκύπτει η (59) που οδηγεί στο επιθυμητό άτοπο και ολοκληρώνει την απόδειξη.

2.7.2 Το αντίστροφο

Με δεδομένο ότι f κυρτή (ή κοίλη) υποθέτουμε ότι υπάρχει εφαπτομένη που τέμνει την γραφική παράσταση και σε άλλο σημείο εκτός του σημείου επαφής $M_0(x_0, f(x_0))$ Τότε θα υπάρχει x_1 ώστε

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) \quad (60)$$

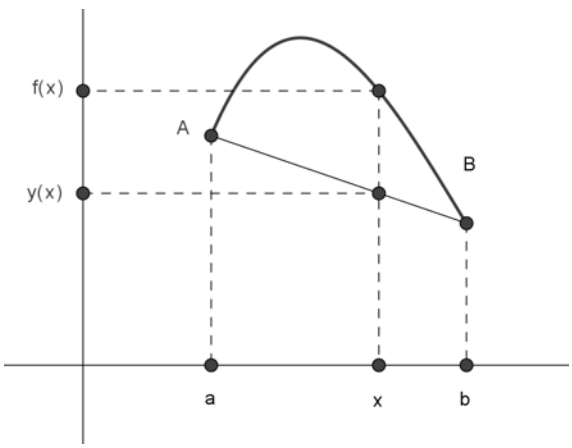
Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στην (60) παίρνουμε $f'(x_0) = f'(\xi)$ με $\xi \neq x_0$ Τότε υπάρχουν δυο παράλληλες εφαπτόμενες της $\mathcal{C}_f$ που είναι άτοπο λόγω της πρότασης 6

2.8 Για την Πρόταση 8

2.8.1 Το ευθύ

Για την απόδειξη της όγδοης πρότασης έχουμε: Υποθέτουμε ότι το εμβαδό του τραπεζίου $E(T)$ είναι πάντοτε μεγαλύτερο από το εμβαδόν $E(C)$ που ορίζει η συνάρτηση, αλλά η f δεν είναι κυρτή. Τότε από τις προτάσεις 2 και 5 συμπεραίνουμε ότι θα υπάρχει χορδή ΑΒ της $\mathcal{C}_f$ που βρίσκεται «κάτω» από την $\mathcal{C}_f$ ή θα ταυτίζεται με την f αφού f συνεχής. Δηλαδή

$$y(x) \leq f(x) \ \forall x \in (a, b) \ , \ f(a) = y(a) \ , \ f(b) = y(b) \quad (61)$$



Αν ολοκληρώσουμε την (61) από a έως b παίρνουμε

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b y(x)dx \Leftrightarrow E(C) \geq E(T)$$

άτοπο εξ υποθέσεως. Άρα η f είναι κυρτή.

2.8.2 Το αντίστροφο

Αν η f είναι κυρτή τότε οποιαδήποτε χορδή της, είναι πάνω από αυτή. Άρα

$$y(x) > f(x) \ \forall x \in (a, b) \ , \ f(a) = y(a) \ , \ f(b) = y(b) \quad (62)$$

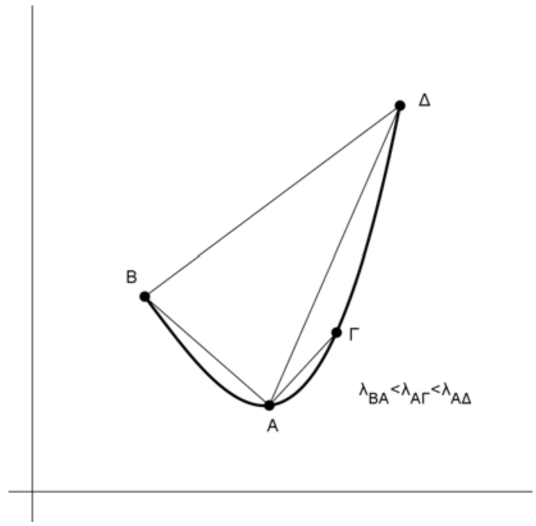
Ολοκληρώνουμε την (62) σε οποιοδήποτε διάστημα $[a, b]$ και έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx < \int_a^b y(x)dx \Leftrightarrow E(C) < E(T)$$

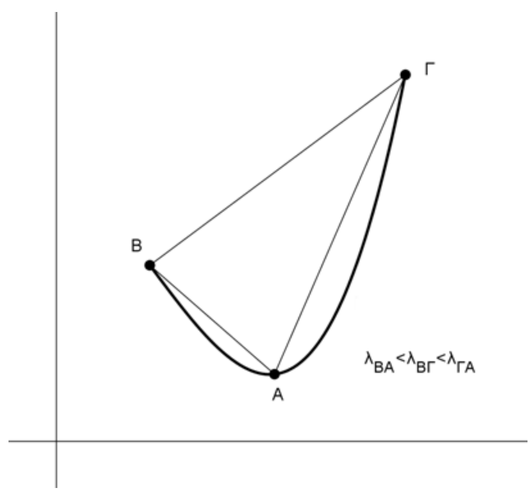
που αποδεικνύει το ζητούμενο. Η (61) πιο αυστηρά αποδεικνύεται όπως παρακάτω: Αν η f ταυτίζεται με την χορδή ψ τα πράγματα είναι προφανή. Αν όχι τότε: έστω Α κοινό σημείο των f, y και Β το πλησιέστερο σημείο με το Α κοινό σημείο των f, y. Αφού f, y συνεχείς και η $f - y$ δεν έχει ρίζα ανάμεσα στα Α, Β θα έχει σταθερό πρόσημο και μάλιστα θετικό λόγω της υπόθεσης μας. Έτσι προκύπτει η (61) και στις δυο περιπτώσεις

3 Γραφικά Συμπερασματα

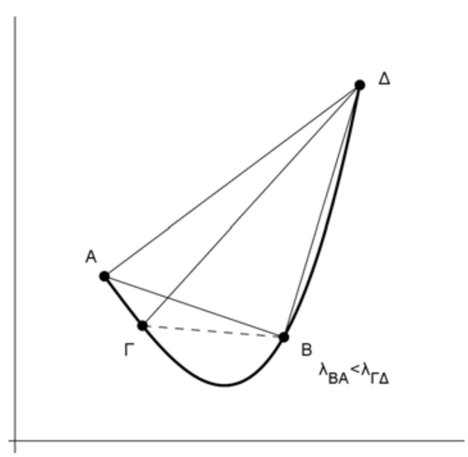
3.1



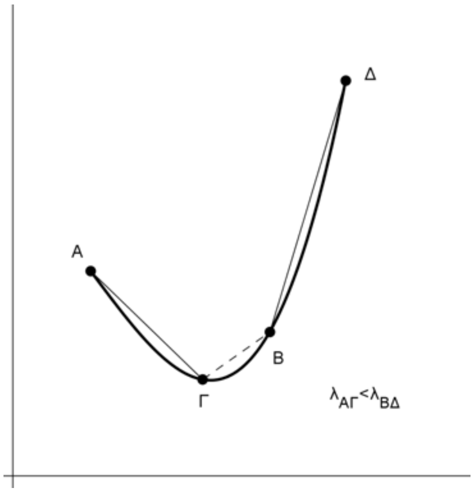
3.2



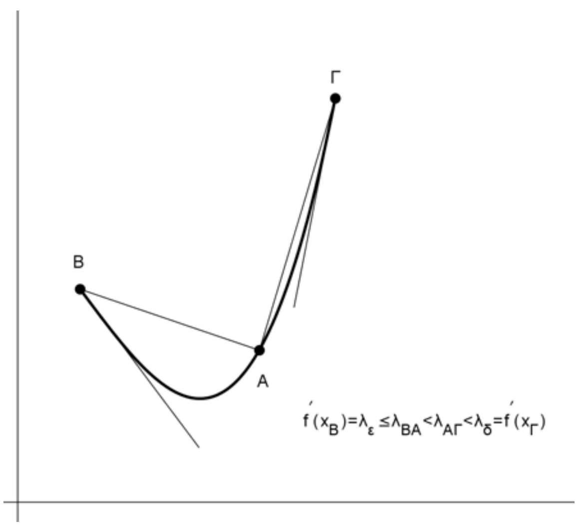
3.3



3.4



3.5



4 Μια πιο προχωρημένη μελέτη για την συνέχεια της παραγώγου μια κυρτής συνάρτησης

Η ανάλυση που ακολουθεί είναι λίγο πιό πέρα από την ύλη του Λυκείου.

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι αν μια συνάρτηση h είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε:

$$\begin{array}{c}\text{τα πλευρικά όρια } \lim\limits_{x\to x_0^-} h(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} h(x) \\ \text{υπάρχουν και είναι πραγματικοί αριθμοί}\end{array} \tag{63}$$

Πράγματι: αφού h γνήσια αύξουσα το σύνολο των εικόνων της h το διάστημα $(-\infty, x_0]$, δηλαδή το $h((-\infty, x_0])$, είναι φυσικά μη κενό και άνω φραγμένο π.χ από το $h(x_0+1)$. Ονομάζω λοιπόν με λ το ελάχιστο άνω φράγμα του. Δηλαδή θέτω

$$\lambda = \sup h((-\infty, x_0]) \in \mathbb{R} \tag{64}$$

Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$: για κάθε x με $x_0-\delta < x < x_0$ να ισχύει $\lambda-\varepsilon < h(x) < \lambda < \lambda+\varepsilon$ Η προηγούμενη πρόταση εξασφαλίζει ότι $\lim\limits_{x\to x_0^-} h(x) = \lambda \in \mathbb{R}$. Αντίστοιχα ακριβώς προκύπτει $\lim\limits_{x\to x_0^+} h(x) = \mu \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι

$$\text{αν } h = f' \text{ τότε } \lambda = \mu \tag{65}$$

Πράγματι αν $\lambda \neq \mu$,οπότε και $\lambda < \mu$ αφού $h = f'$ είναι γνήσια αύξουσα, τότε

$$f'(x) \leq \lambda\ ,\ \forall x \leq x_0 \ \ \textit{και}\ \ \mu \leq f'(x)\ ,\ \ \forall x \geq x_0$$

με συνέπεια η $f'(x)$ να μην παίρνει καμιά τιμή ανάμεσα στα λ και μ, πράγμα άτοπο από το θεώρημα Darboux. Συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = \lambda = \mu = L \in \mathbb{R}$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής κοντά στο x_0 διότι αφού f παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi)$ με ξ ανάμεσα στα x και x_0. Τότε όταν $x \to x_0$ και το $\xi \to x_0$. Παίρνουμε όρια και προκύπτει $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\xi\to x_0} f'(\xi) \Rightarrow f'(x_0) = L$. Άρα η f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (Φυσικά αντί του $\mathbb{R}$ θα μπορούσαμε να έχουμε ένα οποιοδήποτε άλλο ανοικτό διάστημα)

Πρόταση 9 *Έστω ότι η f είναι είτε κυρτή είτε κοίλη. Τότε ξ του θεωρήματος μέσης τιμής είναι συνεχής συνάρτηση του x*

Απόδειξη Το ξ του θεωρήματος μέσης τιμής ορίζεται μέσω της συνάρτησης κλίσης που έχει τύπο

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ ,\ x \neq x_0 \\ f'(x_0)\ ,\ x = x_0 \end{cases} = \begin{cases} f'(\xi)\ ,\ x \neq x_0 \\ f'(x_0)\ ,\ x = x_0 \end{cases} \tag{66}$$
$$\text{με } \xi \text{ ανάμεσα στα } x,\ x_0$$

Ακριβέστερα: Αντιστοιχίζουμε σε κάθε πραγματικό $x \neq x_0$ τον αριθμό ξ του τύπου (66), ενώ αν $x = x_0$ θεωρούμε ότι

$$\xi = x_0 \tag{67}$$

Τότε για να δείξουμε ότι το ξ είναι συνάρτηση του x θα πρέπει να δειχθεί ότι

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ \textit{με}\ x_1 = x_2 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2$$

Πράγματι αν $x_1 = x_2 \neq x_0$ από την (66) προκύπτει άμεσα ότι

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) \tag{68}$$

'Ομως η f' είναι γνήσια μονότονη, άρα 1-1, οπότε από την (68) είναι $\xi_1 = \xi_2$ Τώρα αν $x_1 = x_2 = x_0$ από την (67) είναι και πάλι $\xi_1 = \xi_2 = x_0$.

Παρατηρηση Μπορούμε πια να συμβολίζουμε το ξ ως $\xi = \xi(x)$ με $x \leq \xi(x) \leq x_0$ ή $x_0 \leq \xi(x) \leq x$ και $\xi(x_0) = x_0$

Βέβαια καλύτερος συμβολισμός θα ήταν να γράψουμε $\xi = \xi_{x_0}(x)$ για τους ίδιους λόγους που αναφέραμε στην πρόταση 4 όταν ορίσαμε την συνάρτηση g. Η συνάρτηση $\xi(x)$ είναι γνήσια μονότονη διότι αν f κυρτή δείξαμε στην πρόταση 4 ότι η οπότε Αν $x_1, x_2 \neq x_0$ τότε $x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow f'(\xi(x_1)) < f'(\xi(x_2))$ Άρα

$$\xi(x_1) < \xi(x_2) \tag{69}$$

αφού $f' \updownarrow$ που σημαίνει ότι $\xi \updownarrow$ όταν f κυρτή. Αν κάποιο από τα x_1, x_2 είναι το x_0 και πάλι ισχύει η προηγούμενη. Αντίστοιχα αν η f είναι κοίλη. Χρησιμοποιώντας δυο θεωρήματα, εκτός ύλης λυκείου, μπορεί να αποδειχτεί ότι η $\xi(x)$ είναι συνεχής Θα δείξουμε ότι: Αν $k \in (\xi(x_1), \xi(x_2))$ τότε υπάρχει x_3 ώστε:

$$\xi(x_3) = k \tag{70}$$

Εξ άλλου έχουμε ότι ισχύει:

$$\xi(x_3) = k \overset{f':1-1}{\Leftrightarrow} f'(\xi(x_3)) = f'(k) \Leftrightarrow f'(\xi_3) = f'(k) \qquad (71)$$

$$k \in (\xi(x_1), \xi(x_2)) \Leftrightarrow \xi_1 < k < \xi_2 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi_1) < f'(k) < f'(\xi_2) \qquad (72)$$

Όμως από θεώρημα Darboux η f' παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στα $f'(\xi_1), f'(\xi_2)$ άρα και την $f'(k)$ δηλαδή υπάρχει ξ_3 ώστε $f'(\xi_3) = f'(k)$ όταν $\xi_1 < k < \xi_2$ Τότε η ξ παίρνει όλες τις τιμές οποιουδήποτε διαστήματος (ξ_1, ξ_2), δηλαδή ισχύει η (70) και επειδή είναι και γνήσια μονότονη, πράγμα που αποδείχτηκε αμέσως προηγουμένως, τότε είναι και συνεχής. Θα αναφέρουμε και μια περιληπτική απόδειξη των δύο προτάσεων που βρίσκονται εκτός ύλης λυκείου. Δηλαδή.

Πρόταση 10 *Αν $f : (a,b) \to R$ η συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη και παίρνει όλες τις τιμές ενός διαστήματος Δ τότε είναι συνεχής στο (α,β).*

Απόδειξη Πράγματι: Το οποιοδήποτε x_0 του (a,b) είναι σημείο συσσωρεύσεως του (a,b). Πάντα δηλαδή είναι δυνατόν να θεωρούμε ότι το $x \to x_0$, $x \in (a,b)$. Στην περίπτωση άκρου κλειστού διαστήματος το όριο θα ήταν το κατάλληλο πλευρικό. Αφού f είναι γνήσια μονότονη δείξαμε στην ότι τα πλευρικά όρια $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ υπάρχουν και είναι πραγματικοί. Τροποποιώντας λίγο την απόδειξη και θέτοντας $\lambda = \sup h((a,x_0])$ και αντίστοιχα $\mu = \inf h([x_0,b))$, με $\lambda \le f(x_0) \le \mu$, αν χρησιμοποιήσουμε ίδια επιχειρήματα ($\lambda \ne \mu$) όπως στην (65), καταλήγουμε στο επιθυμητό άτοπο, λόγω της υπόθεσης ότι η συνάρτηση παίρνει όλες τις τιμές του διαστήματος Δ

Πρόταση 11 *(Θεώρημα Darboux). Αν f παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με $f'(a) < k < f'(b)$ τότε υπάρχει ξ στο (a,b) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = k$ (Δηλαδή η $f'(x)$ παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στα $f'(a), f'(b)$).*

Η απόδειξη στηρίζεται στο λήμμα 5 και στα παρακάτω λήμματα. Έτσι αρχικά με την εις άτοπο απαγωγή δείχνουμε ότι:

Λήμμα 7 *Αν $f'(x) \ne 0$ για κάθε ξ στο εσωτερικό ενός διαστήματος Δ και η f είναι συνεχής στο Δ τότε η f είναι 1-1 στο Δ.*

Κατόπιν λόγω του λήμματος 5 δείχνουμε ότι:

Λήμμα 8 *Αν $f'(x) \ne 0$ για κάθε ξ στο εσωτερικό ενός διαστήματος Δ και η f είναι συνεχής στο Δ τότε η f είναι γνήσια μονότονη στο Δ.*

Μετά με την βοήθεια του ορισμού της παραγώγου και της προηγούμενης δείχνουμε ότι:

Λήμμα 9 *Αν $f'(x) \ne 0$ για κάθε ξ ενός διαστήματος Δ, τότε η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ.*

Τέλος πάλι με την εις άτοπο απαγωγή και την βοήθεια της προηγούμενης ολοκληρώνεται η απόδειξη της [74]. (Η απόδειξη στην βιβλιογραφία ακολουθεί άλλο δρόμο χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fermat και τον ορισμό της παραγώγου).