Εκθέτης

Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας

Φυλλο 2, 4 Ιανουαριου 2010

Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Στοιχειοθετείται με το $\LaTeX 2_\varepsilon$
Επιμέλεια:
Ν.Σ. Μαυρογιάννης, Δρ Μαθηματικών
Πειραματικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης
mavrogiannis@gmail.com

Μερικά συμπεράσματα πάνω στα θεωρήματα μέσης τιμής του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού

Μπάμπης Στεργίου

Περίληψη

Το παρακάτω άρθρο γράφηκε με αφορμή τα όσα αναφέρονται στις δύο σημαντικές πηγές που δίνονται στη βιβλιογραφία. Έχουν σκοπό να εμπλουτίσουν το οπλοστάσιο του καθηγητή του μαθηματικών με το να καταδείξουν ορισμένα αξιόλογα συμπεράσματα των θεωρημάτων μέσης τιμής, τόσο του διαφορικού όσο και του ολοκληρωτικού λογισμού. Η χρήση των λατινικών γραμμάτων στις μεταβλητές έγινε για πρακτικούς λόγους κατά την πληκτρολόγηση του κειμένου και ελπίζω αυτό να μην αποτελέσει αρνητικό στοιχείο στην κατανόηση όσων ακολουθούν. Μία αρχική μορφή αυτής της εργασίας παρουσιάστηκε τον Σεπτέμβριο του 2009 στον δικτυακό τόπο mathematica.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον συνάδελφο Χρήστο Καρδάση που έκανε την επιμέλεια των αποδείξεων.

1 Στο Θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange

Θεώρημα 1 *1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b), τότε για κάθε $x\in(a,b]$ υπάρχει $c=c(x)\in(a,x)$ τέτοιο, ώστε*

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$$

Θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange

2. Αν επιπλέον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο a με $f''(a)\neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

Αποδειξη

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(t)=f(t)-f(a)-(t-a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

η οποία είναι συνεχής στο $[a,x]$ και παραγωγίσιμη στο (a,x) με

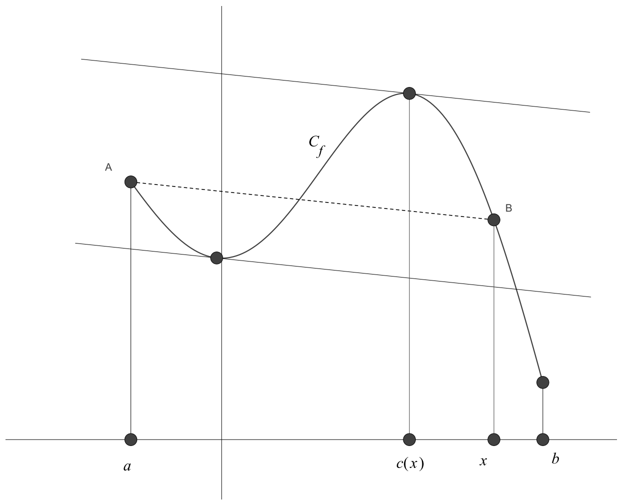
$$h'(t)=f'(t)-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$h(a)=f(a)-f(a)-(a-a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$$

και

$$h(x)=f(x)-f(a)-(x-a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$$

Έτσι ισχύει το θεώρημα Rolle, δηλαδή υπάρχει $c\in(a,x)$ τέτοιο, ώστε $h'(c)=0$ δηλαδή $f'(c)-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0 \Leftrightarrow f'(c)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Leftrightarrow f(x)-f(a)=(x-a)\cdot f'(c)$



2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$F(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)$$

και

$$G(x)=(x-a)^2$$

με $x\in[a,b]$ Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $x\in[a,b)$ με $G'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$. Έχουμε:

- Σύμφωνα με τον κανόνα de L'Hospital είναι: $K=\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\frac{1}{2}f''(a)$
- Σύμφωνα και με το 1) είναι επίσης : $K=\lim\limits_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(c)(x-a)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(c)-f'(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(\frac{f'(c)-f'(a)}{c-a}\cdot\frac{c-a}{x-a})=f''(a)\lim\limits_{x\to a}\frac{c-a}{x-a}$
  Από τις παραπάνω σχέσεις και αφού πρόκειται για το ίδιο όριο παίρνουμε ότι

$$\lim_{x\to a}\frac{c(x)-a}{x-a}=\frac{1}{2}$$

2 Στο 1ο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

Θεώρημα 2 *1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

(1ο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού)

2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε για κάθε $x \in (a, b]$ υπάρχει $c = c(x) \in (a, x)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_a^x f(t)dt = f(c)(x-a)$$

Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο a με $f'(a) \neq 0$, τότε

$$\lim_{x\to a} \frac{c\,(x)-a}{x-a} = \frac{1}{2}$$

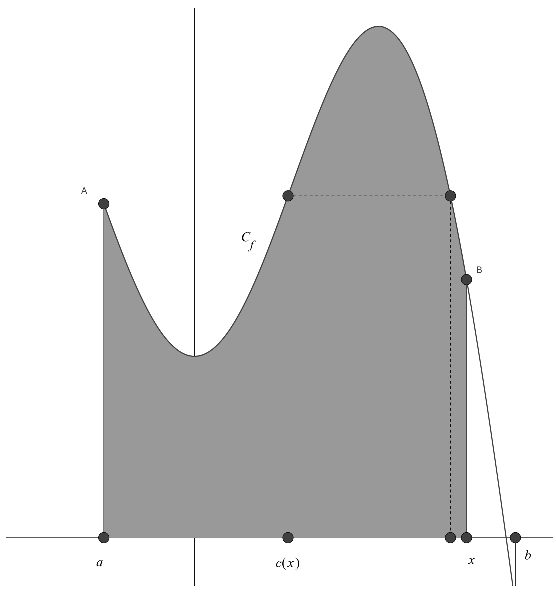
Απόδειξη

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ στο $[a, b]$. Η h είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b). Άρα από το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει $c \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(c) = \frac{h(b)-h(a)}{b-a} = \frac{\int\limits_a^b f(t)dt - 0}{b-a} = \frac{\int\limits_a^b f(t)dt}{b-a}$$

Επομένως

$$\int\limits_a^b f(t)dt = (b-a)\,h'(c)$$



2. Θεωρούμε το όριο:

$$K = \lim_{x\to a} \frac{\int_a^x f(t)dt - xf(a) + af(a)}{(x-a)^2}$$

Σύμφωνα με το 1ο θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού, υπάρχει $c \in (a, x)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^x f(t)dt = f(c)(x-a)$$

Επομένως:
$K = \lim\limits_{x\to a} \frac{\int_a^x f(t)dt - xf(a) + af(a)}{(x-a)^2} =$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(c)(x-a) - xf(a) + af(a)}{(x-a)^2} =$
$= \lim\limits_{x\to a} \frac{f(c)(x-a) - f(a)(x-a)}{(x-a)^2} =$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f(c)-f(a)}{x-a}$
$= \lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \cdot \frac{c-a}{x-a}\right) =$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \lim\limits_{x\to a} \frac{c-a}{x-a}\right) =$
$= f'(a) \cdot \lim\limits_{x\to a} \frac{c-a}{x-a}$ (1)

Εφαρμόζοντας όμως το θεώρημα του de L'Hospital για το όριο K παίρνουμε:
$K = \lim\limits_{x\to a} \frac{\int_a^x f(t)dt - xf(a) + af(a)}{(x-a)^2} =$
$= \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2} f'(a)$ (2)
Επειδή $f'(a) \neq 0$, από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε :

$$\lim_{x\to a} \frac{c(x)-a}{x-a} = \frac{1}{2}$$

2.1 Γενικεύσεις

Στο σκεπτικό του προηγούμενου θεωρήματος κινούνται και οι επόμενες προτάσεις:

Πρόταση 1 *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο σημείο a με $f'(a) = 0$ και $f''(a) \neq 0$, τότε*

1. Για κάθε $x \in (a, b]$ υπάρχει $c = c(x) \in (a, x)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_a^x f(t)dt = f(c)(x-a)$$

2. Ισχύει ότι :

$$\lim_{x\to a} \frac{c(x)-a}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Πρόταση 2 *Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και n φορές παραγωγίσιμη στο σημείο a με $f^{(k)}(a) = 0$ για $k = 1, 2, 3, ..., n-1$ και $f^{(n)}(a) \neq 0$, τότε*

1. Για κάθε $x \in (a, b]$ υπάρχει $c = c(x) \in (a, x)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_a^x f(t)dt = f(c)(x-a)$$

2. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to a} \frac{c(x)-a}{x-a} = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$

3 Στο 2ο θεώρημα Μέσης Τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

Θεώρημα 3 *1. Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $[a, b]$ και η g δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $[a, b]$, τότε για κάθε $x \in (a, b]$ υπάρχει $c = c(x) \in [a, x]$ τέτοιο, ώστε*

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^x g(t)dt$$

2ο θεώρημα Μέσης Τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού

2. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο a με $f'(a) \neq 0$ και $g(a) \neq 0$ τότε

$$\lim_{x \to a} \frac{c(x) - a}{x - a} = \frac{1}{2}$$

Αποδειξη

1. Η g είναι συνεχής και μη μηδενιζόμενη στο $[a, b]$, οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο. Έστω ότι $g(x) > 0$. Η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα , οπότε θα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή δηλαδή $m \leq f(x) \leq M$. Άρα

$$mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t)$$

Ολοκληρώνοντας στο $[a, x]$ προκύπτει:
$\int\limits_a^x mg(t)dt \leq \int\limits_a^x f(t)g(t)dt \leq \int\limits_a^x Mg(t)dt \Leftrightarrow$
$m\int\limits_a^x g(t)dt \leq \int\limits_a^x f(t)g(t)dt \leq M\int\limits_a^x g(t)dt$

Όμως $\int\limits_a^x g(t)dt > 0$ οπότε προκύπτει

$$m \leq \frac{\int\limits_a^x f(t)g(t)dt}{\int\limits_a^x g(t)dt} \leq M$$

Από εδώ συμπεραίνουμε ότι υπάρχει c $\in$ [a, x] τέτοιο ,ώστε

$$\frac{\int\limits_a^x f(t)g(t)dt}{\int\limits_a^x g(t)dt} = f(c)$$

δηλαδή

$$\int\limits_a^x f(t)g(t)dt = f(c) \cdot \int\limits_a^x g(t)dt$$

2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις F, G στο $[a, b]$ με τύπους:

$$F(x) = \int_a^x f(t)g(t)dt - f(a)\int_a^x g(t)dt$$

και

$$G(x) = (x - a)^2$$

Αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $[a, b]$ με $G'(x) \neq 0$ για κάθε x στο $(a, b]$. Από τον κανόνα de L'Hospital παίρνουμε:

$K = \lim\limits_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x)}{2(x-a)} =$
$= \frac{1}{2}\lim\limits_{x \to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)) = \frac{1}{2}f'(a)g(a) \quad (1)$

Από την άλλη μεριά, σύμφωνα με το 1) είναι:
$K = \lim\limits_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(c)\int_a^x g(t)dt - f(a)\int_a^x g(t)dt}{(x-a)^2} =$
$= \lim\limits_{x \to a}(\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \cdot \frac{c-a}{x-a} \cdot \frac{\int_a^x g(t)dt}{x-a}) = f'(a)g(a)\lim\limits_{x \to a}\frac{c-a}{x-a} \quad (2)$
όπου στο τελευταίο όριο έχουμε χρησιμοποιήσει ξανά τον κανόνα de L'Hospital. Από τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε, λόγω των περιορισμών $f'(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$ ότι $\lim\limits_{x \to a} \frac{c(x)-a}{x-a} = \frac{1}{2}$

4 Στο Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy

Θεώρημα 4 *1. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b) με $g'(t) \neq 0$ για κάθε $t \in (a, b)$. Τότε, για κάθε $x \in (a, b]$ ισχύει ότι:*

(α΄) $g(x) \neq g(a)$

(β΄) υπάρχει $c = c(x) \in (a, x)$, τέτοιο, ώστε

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy

2. Αν επιπλέον οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο a, $g'(a) \neq 0$ και $f''(a)g'(a) \neq f'(a)g''(a)$, τότε:

$$\lim_{x \to a} \frac{c(x) - a}{x - a} = \frac{1}{2}$$

Αποδειξη

1. (α΄) Υποθέτουμε ότι $g(x) = g(a)$. Όμως η g είναι συνεχής στο $[a, x]$, παραγωγίσιμη στο (a, x) και $g(x) = g(a)$. Άρα ισχύει το θεώρημα Rolle, δηλαδή υπάρχει $c \in (a, x)$ τέτοιο, ώστε $g'(c) = 0$, το οποίο είναι άτοπο, διότι $g'(t) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, b)$.

   (β΄) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(t) = f(t) \cdot [g(x) - g(a)] - g(t) \cdot [f(x) - f(a)]$$

Η h είναι συνεχής στο $[a, x]$,παραγωγίσιμη στο (a, x) με

$$h'(t) = f'(t) \cdot [g(x) - g(a)] - g'(t) \cdot [f(x) - f(a)]$$

και ισχύει:
$h(a) = f(a) \cdot [g(x) - g(a)] - g(a) \cdot [f(x) - f(a)] =$
$f(a) \cdot g(x) - g(a) \cdot f(x)$
$h(x) = f(x) \cdot [g(x) - g(a)] - g(x) \cdot [f(x) - f(a)] =$
$f(a) \cdot g(x) - g(a) \cdot f(x)$
δηλαδή $h(x) = h(a)$. Από το θεώρημα Rolle προκύπτει ότι υπάρχει $c \in (a, x)$ τέτοιο, ώστε $h'(c) = 0$,δηλαδή

$$f'(c) \cdot [g(x) - g(a)] - g'(c) \cdot [f(x) - f(a)] = 0$$

και τελικά

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

2. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$F(x) = f(x) - f(a) - [g(x) - g(a)]\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

και

$$G(x) = (x-a)^2$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι παραγωγίσιμες στο $[a, b)$ και $G'(x) \neq 0$ στο (a, b).

- Επειδή από το 1) είναι

$$f(x) - f(a) = [g(x) - g(a)]\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

έχουμε:

$K = \lim\limits_{x\to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{[g(x)-g(a)]\frac{f'(c)}{g'(c)} - [g(x)-g(a)]\frac{f'(a)}{g'(a)}}{(x-a)^2} =$
$= \lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\frac{f'(c)}{g'(c)} - \frac{f'(a)}{g'(a)}}{c-a} \cdot \frac{c-a}{x-a} \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) =$
$g'(a)\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)'\Big|_{x=a} \cdot \lim\limits_{x\to a} \frac{c-a}{x-a} \quad (1)$

- Σύμφωνα με τον κανόνα de L'Hospital έχουμε:
$K = \lim\limits_{x\to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{F'(x)}{G'(x)} =$
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x) - g'(x)\frac{f'(a)}{g'(a)}}{2(x-a)} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f'(a)}{g'(a)}}{x-a} \cdot g'(x)\right) =$
$\frac{1}{2}g'(a) \cdot \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)'\Big|_{x=a} \qquad (2)$

Από τις σχέσεις (1) και (2), λόγω των περιορισμών, παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση.

Βιβλιογραφια[1]

α) B.Jacobson *On the mean value theorem for integrals*, AMM, vol 89 - 1992

β) Εμιλ Ποπα *Περί του ενδιάμεσου σημείου στα θεωρήματα των μέσων*, GM - 1994

[1] Ευχαριστώ το φίλο και συνάδελφο Νίκο Μαυρογιάννη που μου εξασφάλισε το πρώτο άρθρο της βιβλιογραφίας